東京大学・文科

1　a を正の実数とする．座標平面において，放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とおく．l と C の交点のうち，P と異なる点を Q とおく．

（1） Q の x 座標を求めよ．

Q における C の接線と直交し，Q を通る直線を m とおく．m と C の交点のうち，Q と異なる点を R とおく．

（2） a がすべての正の実数を動くとき，R の x 座標の最小値を求めよ．

2　平面上で $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$ である二等辺三角形 ABC を考える．正の実数 r に対し，A，B，C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする．ただし，この問いでは，三角形と円は周とその内部からなるものとする．辺 AB，AC，BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s，三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す．

（1） $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

（2） $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

（3） $0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対して，$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ のとき，s と t を θ を用いて表せ．

3　白玉 2 個が横に並んでいる．投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを用いて，次の手順(＊)をくり返し，白玉または黒玉を横一列に並べていく．

手順(＊)　コインを投げ，表がでたら白玉，裏がでたら黒玉を，それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく．そして，新しくおいた玉の色がその 1 つ左の玉の色と異なり，かつ 2 つ左の玉の色と一致するときには，新しくおいた玉の 1 つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる．

例えば，手順(＊)を 2 回行いコインが裏，表の順にでた場合には，白玉が 4 つ並ぶ．正の整数 n に対して，手順(＊)を n 回行った時点での $(n+2)$ 個の玉の並び方を考える．

（1） $n = 3$ のとき，右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ．

（2） n を正の整数とする．右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ．

（3） n を正の整数とする．右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率を求めよ．

4　a を実数とする．座標平面において，次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする．

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 + 2 \\ y \geqq |x^2 + a| \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

a が $-2 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ．

1

数学Ⅱ【接線または法線】標準

《文系ゆえに難しい (B15) ☆》

▶解答◀　（1） $y' = 2x$ であるから，P における法線 l の方程式は，$a > 0$ に注意して

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$$

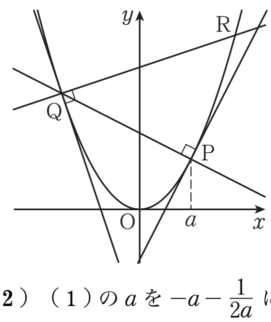
これと C を連立して

$$x^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$$

$$(x - a)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) = 0$$

$$x = a,\ -a - \frac{1}{2a}$$

よって，Q の x 座標は $\boldsymbol{-a - \dfrac{1}{2a}}$ である．



（2）（1）の a を $-a - \dfrac{1}{2a}$ に置き換えると，R の x 座標は

$$-\left(-a - \frac{1}{2a}\right) - \frac{1}{2\left(-a - \frac{1}{2a}\right)}$$

$$= a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a + \frac{1}{a}}$$

となる．$t=a+\dfrac{1}{2a}$ とおくと，相加・相乗平均の不等式より $t \geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{2a}}=\sqrt{2}$ であり等号は $a=\dfrac{1}{2a}$ すなわち $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で成立する．また，a を大きくすると t はいくらでも大きくなる．これより t の値域は $t \geqq \sqrt{2}$ であり，R の x 座標は $t+\dfrac{1}{2t}$ となる．$k=t+\dfrac{1}{2t}$ とおくと，

$$2kt=2t^2+1 \qquad \therefore \quad 2t^2-2kt+1=0$$

この左辺を $f(t)$ とおいて，$f(t)=0$ が $t \geqq \sqrt{2}$ の範囲に（少なくとも 1 つの）実数解をもつ条件を考える．$f(0)=1$ に注意し，$f(t)$ の判別式を D とすると，まず $D \geqq 0$ であり，

$$\frac{D}{4}=k^2-2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad k \leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2} \leqq k \quad ①$$

$t \geqq \sqrt{2}$ に実数解をもつ条件は ① のもとで

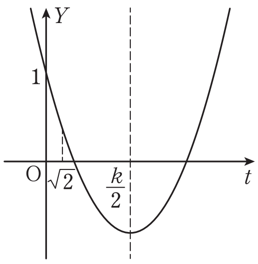
「$\dfrac{k}{2} \geqq \sqrt{2}$ かつ $f(\sqrt{2}) \geqq 0$」

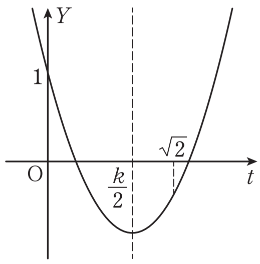
または「$f(\sqrt{2}) \leqq 0$」

である．$f(\sqrt{2})=5-2\sqrt{2}k$ も合わせるとこれは

「$k \geqq 2\sqrt{2}$ かつ $k \leqq \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$」または「$k \geqq \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$」

よって $k \geqq \dfrac{5}{2\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ で，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}}$ である．





♦別解♦　（２）**【微分する】**

数 III の微分法を知っていれば，解の配置に帰着する必要はない．

$t \geqq \sqrt{2}$ のもとで，$t+\dfrac{1}{2t}$ の値域を求める．

$g(t)=t+\dfrac{1}{2t}$ とおくと $t \geqq \sqrt{2}$ では

$$g'(t)=1-\frac{1}{2t^2}=\frac{2t^2-1}{2t^2}>0$$

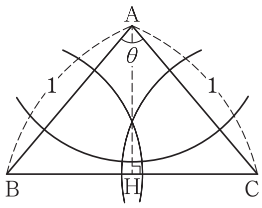
となるから単調増加である．

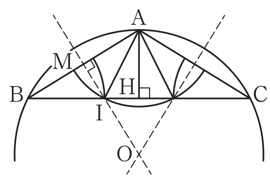
これより最小値は $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}}$ である．

2　数学I【平面図形の雑題】ｱﾔ難

《ギリギリを考える（C25）☆》

▶解答◀　（１）（２）（３）　A から BC に下ろした垂線の足を H，AB の中点を M，AC の中点を N とする．このとき，$\angle \mathrm{BAH}=\angle \mathrm{CAH}=\dfrac{\theta}{2}$ であることから，$\mathrm{BC}=2\mathrm{BH}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ である．





まず，s について考える．AH と BH の長さを考えると，$\mathrm{AH}=\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\mathrm{BH}=\sin\dfrac{\theta}{2}$ であり，$\mathrm{AH} \geqq \mathrm{BH}$ を解くと

$$\cos\frac{\theta}{2} \geqq \sin\frac{\theta}{2} \qquad \therefore \quad 0<\theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

である．このとき，AB，AC，BC がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は

$\mathrm{M}, \mathrm{N} \in D_r$ かつ $\mathrm{H} \in D_r$

$1 \leqq 2r$ かつ $\mathrm{BC} \leqq 2r$

$r \geqq \max\left\{\dfrac{1}{2}, \sin\dfrac{\theta}{2}\right\}$ ……………………………①

である．ここで，$\max\{a, b\}$ は a と b のうち小さくない方の値を表している．ここで，$0<\dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に注意して $\dfrac{1}{2} \leqq \sin\dfrac{\theta}{2}$ を解くと，

$$\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad \frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

となることから，① より，

$\boldsymbol{0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{3}}$ のとき $\boldsymbol{s=\dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}}$ のとき $\boldsymbol{s=\sin\dfrac{\theta}{2}}$

である．特に，（１）で，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $s=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ となる．

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta<\pi$ のとき $\mathrm{AH} \leqq \mathrm{BH}$ である．線分 AB の垂直二等分線と BC の交点を I とすると，$\mathrm{AI}=\mathrm{BI}$ であり，I は必ず線分 BH 上にある（H より右に来ることはない）．このとき，$\triangle \mathrm{AMI} \equiv \triangle \mathrm{BMI}$ であり，

$$\angle \mathrm{ABI}=\angle \mathrm{BAI}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

であることから，

$$\mathrm{BI}=\frac{\mathrm{BM}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

となる．AB，AC，BC がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は $\mathrm{I} \in D_r$ であるから，それは $r \geqq \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$ となる．よって，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta<\pi}$ のとき $\boldsymbol{s=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}}$ である．特に，（２）で $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$s=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ である．

次に，t について考える．△ABC の外心を O とし，外接円の半径を R とする．円周角の定理より $\angle\mathrm{BOC} = 2\angle\mathrm{BAC} = 2\theta$ であるから，O が △ABC の内部または周に含まれる条件は

$$2\theta \leqq \pi \qquad \therefore\quad 0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

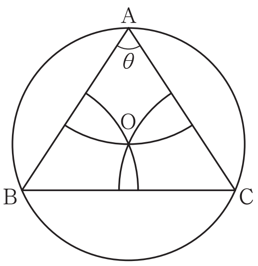
である．また，正弦定理より

$$2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta} \qquad \therefore\quad R = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

である．このとき，O は 3 頂点から等距離にあり，△ABC がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は $\mathrm{O} \in D_r$ である．よって，

$$r \geqq R \qquad \therefore\quad r \geqq \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

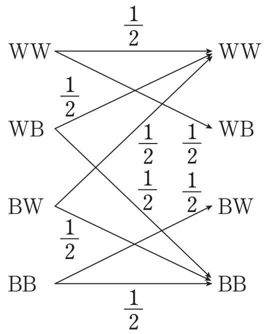
となるから，$\boldsymbol{0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}}$ のとき $t = \boldsymbol{\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}}$ である．特に，(1) で $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき，$t = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ である．



$\frac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ のときは，外心 O は △ABC の内部にない．s のときと同様に考えると，△ABC がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は $\mathrm{I} \in D_r$ であるから，それは $r \geqq \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ となる．よって，$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi}$ のとき $t = \boldsymbol{\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}}$ である．特に，(2) で $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき，$t = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ である．

3 数学B【確率と漸化式】標 準
《文字をおいて考える (B25)》

▶解答◀ (1)(2)(3)　手順(∗)を n 回行って，右から 2 番目が白である確率を p_n とする．また，白玉を W，黒玉を B とかく．手順(∗)を n 回行って右から 2, 1 番目が WW，WB，BW，BB となる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とすると，$p_n = a_n + b_n$ である．



このとき，図より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n) \quad \cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \quad \cdots\cdots ③$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n + d_n) \quad \cdots\cdots ④$$

である．また，$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ も合わせると，①，④ は

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - d_n) \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n) \quad \cdots\cdots ⑥$$

となる．⑤ − ⑥ より

$$a_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - d_n)$$

これより数列 $\{a_n - d_n\}$ が等比数列で，$a_0 = 1$, $d_0 = 0$ であるから

$$a_n - d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - d_0)$$

$$a_n - d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ⑦$$

また，⑤ + ⑥ より

$$a_{n+1} + d_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}(a_n + d_n)$$

$$a_{n+1} + d_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n + d_n - \frac{2}{3}\right)$$

これより数列 $\left\{a_n + d_n - \frac{2}{3}\right\}$ は等比数列で，

$$a_n + d_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 + d_0 - \frac{2}{3}\right)$$

$$a_n + d_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧ より

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

$$d_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となる．また，

$$p_n = a_n + b_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

である．(1) で $n = 3$ のとき

$$p_3 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

注意　**【場合分けして答える】**

(3) は偶奇に分けて答えてもよい．**n が奇数**のとき

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$$

であり，**n が偶数**のとき

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

4　数学II【面積】標準

《面倒ではある (B20)》

▶解答◀　まず，$y = -(x^2 + a)$ と $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ の大小を調べよう．$-2 \leqq a < 2$ においては

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2 - \{-(x^2 + a)\} = \frac{x^2}{2} + a + 2 \geqq 0$$

であるから，折り返した $y = -(x^2+a)$ が $y = -\frac{1}{2}x^2+2$ より上側に来ることはない．

- $-2 \leqq a \leqq -1$ のとき：図 1 のようになる．

$-1 \leqq x \leqq 1$ においては常に $|x^2 + a| = -(x^2 + a)$ である．a が大きくなると $y = -(x^2 + a)$ は下に下がるから，$S(a)$ は増加する．

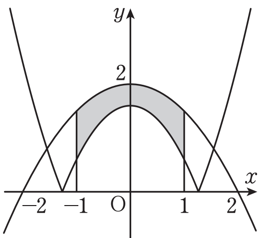


図1

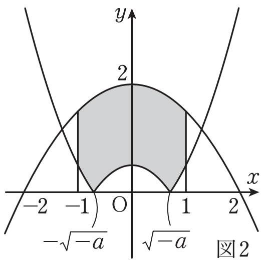


図2

- $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき：図 2 のようになる．

$$\frac{S(a)}{2} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx$$
$$- \int_0^{\sqrt{-a}} \{-(x^2 + a)\}\, dx - \int_{\sqrt{-a}}^1 (x^2 + a)\, dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{6} + 2x\right]_0^1 - \left[-\frac{x^3}{3} - ax\right]_0^{\sqrt{-a}}$$
$$- \left[\frac{x^3}{3} + ax\right]_{\sqrt{-a}}^1$$
$$= \frac{11}{6} + 2\left(\frac{-a\sqrt{-a}}{3} + a\sqrt{-a}\right) - \left(\frac{1}{3} + a\right)$$
$$= \frac{4}{3}a\sqrt{-a} - a + \frac{3}{2}$$

ここで，$t = \sqrt{-a}$ とおくと t のとりうる値の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であり，$t^2 = -a$ も合わせると

$$\frac{S(a)}{2} = -\frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{3}{2}$$

$f(t) = -\frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{3}{2}$ とおくと，

$$f'(t) = -4t^2 + 2t = 2t(-2t + 1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$		$-$
$f(t)$		↗		↘

これより，$-1 \leqq a \leqq 0$ における $S(a)$ の最大値は

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3 = \frac{19}{6}$$

である．

- $0 \leqq a < 2$ のとき：図 3 のようになる．$-1 \leqq x \leqq 1$ においては常に $|x^2 + a| = x^2 + a$ である．a が大きくなると $y = x^2 + a$ は上に上がるから，$S(a)$ は減少する．

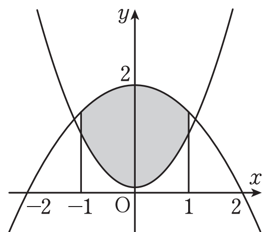


図3

よって，$S(a)$ の最大値は $\boldsymbol{\frac{19}{6}}$ である．

要の分析　**1** は数 III の微分を知っていると見通しがよくなるが，そうでないと難しく感じるだろう．**2** は難しい．**3**，**4** も題意はすぐわかるが，最後までやり切るのにはそれなりに力がいる．昨年よりは点数を取りにくいのは否めない．

（椎茸，Sakura）