1 座標平面上の点 A(0, 0), B(0, 1), C(1, 1), D(1, 0) を考える．実数 $0<t<1$ に対して，線分 AB，BC，CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする．さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする．また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする．

（１） 点 U_t の座標を求めよ．

（２） t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ．

（３） a を $0<a<1$ を満たす実数とする．t が $0\leqq t\leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ．

（25　東大・理科）

1 数学III【曲線の長さ】標 準

《2 乗に気付くか (B20)》

▶解答◀ 混乱がない限り，下付き添字は省略し，U_t を単に U などと書く．

（１） $\overrightarrow{\mathrm{OU}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OS}}+t\overrightarrow{\mathrm{OT}}$

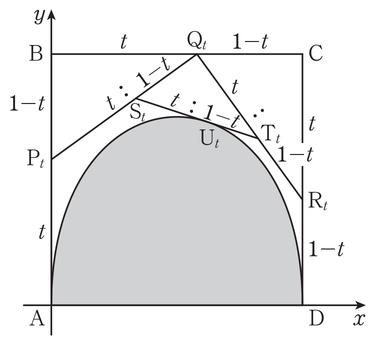
$$=(1-t)\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\}+t\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}\}$$

$$=(1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$=(1-t)^2(0,t)+2t(1-t)(t,1)+t^2(1,1-t)$$

$$=(t^2(3-2t),\ 3t(1-t))$$

であるから，U の座標は $\boldsymbol{(t^2(3-2t),\ 3t(1-t))}$ である．



（２） $x(t)=t^2(3-2t),\ y(t)=3t(1-t)$ とおく．$0<t<1$ において

$$x'(t)=6t-6t^2=6t(1-t)>0$$

であるから，単調に増加する．よって，U が描く曲線と線分 AD で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^1 3t(1-t)\cdot 6t(1-t)\,dt$$

$$=18\int_0^1(t^4-2t^3+t^2)\,dt$$

$$=18\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$=18\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

（３） $y'(t)=3-6t=3(1-2t)$ であるから，

$$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=36t^2(1-t)^2+9(1-2t)^2$$

$$=9\{4t^2(1-t)^2+(1-2t)^2\}$$

$$=9(4t^4-8t^3+8t^2-4t+1)$$

$$=9(2t^2-2t+1)^2$$

となる．これより，$0\leqq t\leqq a$ を動くときの U の弧長を $L(a)$ とすると，$0\leqq t\leqq 1$ において $2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ であることに注意して

$$L(a)=\int_0^a\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}$$

$$=\int_0^a 3(2t^2-2t+1)\,dt=3\left[\frac{2}{3}t^3-t^2+t\right]_0^a$$

$$=\boldsymbol{2a^3-3a^2+3a}$$