2 （１） $x>0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x-1$ を示せ．

（２） 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$$

（25　東大・理科）

2

数学Ⅲ【定積分】やや難

《上下から評価する (C25) ☆》

▶解答◀ （１） $f(x)=(x-1)-\log x$ とおくと $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ であるから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f(1)=0-\log 1=0$$

であるから，$x>0$ において $f(x)\geqq 0$ となり示された．

（２） まず，上から評価する．（１）で，x を $\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}$ に置き換えると，

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \leqq \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

であり，

$$n\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\,dx=\frac{n}{2}\left[\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}-x\right]_1^2$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\left(\frac{n}{n+1}2^{\frac{1}{n}+1}-2\right)-\left(\frac{n}{n+1}-1\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}2^{\frac{1}{n}}-1\right)n+\frac{n}{2(n+1)}$$

$$=(2^{\frac{1}{n}}-1)n-\frac{n}{n+1}\cdot 2^{\frac{1}{n}}+\frac{n}{2(n+1)}$$

$$\to \log 2-1+\frac{1}{2}=\log 2-\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

次に下から評価する．相加・相乗平均の不等式より

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq \log\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2n}\log x \quad\cdots②$$

である．

$$n\int_1^2 \frac{1}{2n}\log x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \log x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(2\log 2-2+1)=\log 2-\frac{1}{2}$$

①，② より

$$n\int_1^2 \frac{1}{2n}\log x\,dx \leqq n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$$

$$\leqq n\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\,dx$$

であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\mathbf{\log 2-\frac{1}{2}}$$