3 平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$a\leqq b$ とする．次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする．

条件： 点 A，B，C，D はそれぞれ辺 EF，FG，GH，HE 上にある．

ただし，辺はその両端の点も含むものとする．

（1） $\angle\mathrm{BCG}=\theta$ とするとき，S を a, b, θ を用いて表せ．

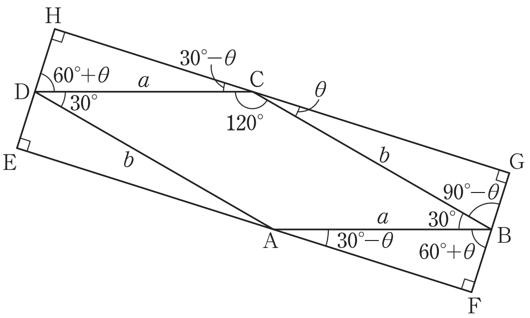
（2） S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ．

（25 東大・理科）

3 数学Ⅱ【三角関数の図形への応用】標準

《落ち着いて変形（B20）》

▶解答◀ （1） $\angle\mathrm{BCG}=\theta$ として，それぞれの角度を図に表すと次のようになる．条件を満たすとき，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ である．スペースが狭いので，図中では度数法で表記した．



この図より

$$\mathrm{CH}=a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),\ \mathrm{GC}=b\cos\theta,$$

$$\mathrm{GB}=b\sin\theta,\ \mathrm{BF}=a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$$

である．よって，

$$\begin{aligned}S&=\mathrm{GH}\cdot\mathrm{GF}\\&=\boldsymbol{\left(a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b\cos\theta\right)}\\&\quad\boldsymbol{\times\left(a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b\sin\theta\right)}\end{aligned}$$

（2）（1）の結果より，

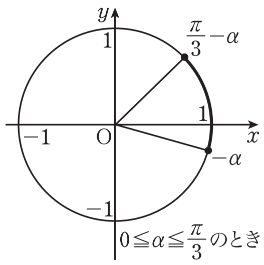
$$\begin{aligned}S&=a^2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b^2\cos\theta\sin\theta\\&\quad+ab\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\theta\right\}\\&=\frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{b^2}{2}\sin 2\theta+ab\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+\frac{b^2}{2}\sin 2\theta+\frac{ab}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cos 2\theta+\left(b^2-\frac{a^2}{2}\right)\sin 2\theta+ab\right\}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\cos(2\theta-\alpha)+\frac{1}{2}ab\end{aligned}$$

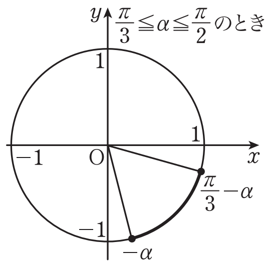
ただし，α は第 1 象限の角で，

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}},$$

$$\sin\alpha=\frac{2b^2-a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ より，$-\alpha\leqq 2\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}-\alpha$ である．





$\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}$ を解く．$\tan\alpha\leqq\tan\dfrac{\pi}{3}$ で

$$\frac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}\leqq\sqrt{3}$$

$$2b^2-a^2\leqq 3a^2 \qquad \therefore\quad b^2\leqq 2a^2$$

すなわち，$\boldsymbol{a\leqq b\leqq\sqrt{2}a}$ のとき，S は $\theta=\dfrac{\alpha}{2}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}+\dfrac{1}{2}ab}$ をとる．また，$\boldsymbol{b\geqq\sqrt{2}a}$ のとき，S は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(b^2-\frac{a^2}{2}\right)+ab\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{1}{2}ab}$$

をとる．