4 この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ．a を正の整数とし，$f_a(x)=x^2+x-a$ とおく．

（1） n を正の整数とする．$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ．

（2） $f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく．次の条件（ⅰ)，(ⅱ）が同値であることを示せ．

（ⅰ） $N_a=1$ である．

（ⅱ） $4a+1$ は素数である．（25 東大・理科）

4

数学A【整数問題の雑題】**やや難**

《素数の判定法 (C25) ☆》

▶解答◀ （**1**） $n>a$ と仮定すると

$$f_a(n)-n^2=n-a>0$$

である．さらに，n, a は正の整数より

$$(n+1)^2-f_a(n)=n+a+1>0$$

これより，$n>a$ のとき

$$n^2<f_a(n)<(n+1)^2$$

となるが，n^2 と $(n+1)^2$ の間に平方数は存在せず，$f_a(n)$ が平方数であることに矛盾する．よって $n \leqq a$ である．

（**2**） 以下，文字はすべて整数とする．$f_a(a)=a^2$ であることから，n, m についての不定方程式 $f_a(n)=m^2$ の解として $(n, m)=(a, a)$ がある．これを自明な解と呼ぶことにすると，（ⅰ）は，$f_a(n)=m^2$ が非自明な解を持たないということである．ここで，$f_a(n)=m^2$ とかけるとき，

$$n^2+n-a=m^2 \qquad \therefore \quad a=n^2+n-m^2$$

となるから，

$$\begin{aligned}4a+1&=4(n^2+n-m^2)+1\\&=(2n+1)^2-(2m)^2\\&=(2n+2m+1)(2n-2m+1)\end{aligned}$$

であり，$4a+1=AB\ (A>B)$ と積の形で書くと，

$$2n+2m+1=A,\ 2n-2m+1=B$$

$$n=\frac{A+B-2}{4},\ m=\frac{A-B}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

となる．ここで，$4a+1$ は 4 で割って 1 余るから，A, B を 4 で割った余りはともに 3 かともに 1 かのいずれかであり $A+B-2,\ A-B$ はともに 4 の倍数になるから，n, m は整数になる．これより，p が素数ならば $A=4a+1,\ B=1$ となって ① は自明な解のみを与えるし，p が合成数ならば $(A, B) \neq (4a+1, 1)$ なる (A, B) が存在して，① によって非自明な解が与えられる．これより，（ⅱ）は $f_a(n)=m^2$ が非自明な解を持たないことと同値である．

よって，（ⅰ）と（ⅱ）は同値である．