5 n を 2 以上の整数とする．1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている．1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える．

(T_i)　左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる．そうでなければ，札の位置をかえない．

最初の状態において札の数字は左から $A_1, A_2, \cdots, A_n$ であったとする．この状態から $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_1), (\mathrm{T}_2), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1})$ を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2), (\mathrm{T}_1)$ を順に行ったところ，札の数字は左から $1, 2, \cdots, n$ と小さい順に並んだ．以下の問いに答えよ．

（1） A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ．

（2） 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の総数を c_n とする．n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ．　（25　東大・理科）

5 数学B【場合の数と漸化式】やや難

《拡張させるか帰着させるか (C25) ☆》

▶解答◀ （1） 1 回目の (T_1) の操作後，一番左の数字は A_1, A_2 のいずれかである．そこから $(\mathrm{T}_2), (\mathrm{T}_3), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2)$ の操作中，一番左の数字は入れ替わることはなく，最後の (T_1) の操作によって，左から 1 番目のままか 2 番目に移る．

したがって，操作終了後，左から 1 から順で並ぶということは，A_1, A_2 のいずれかは必ず 1 か 2 になっていなくてはならない．これより，題意は示された．

（2）（1）が誘導になっているので，その誘導をうまく使いたい．（1）より，$A_1 = 1, 2$ もしくは $A_2 = 1, 2$ であるため，この 4 パターンで場合分けをして考える．

ア：$A_1 = 1$ の場合．操作 T_1 は行わず，左から 2 枚目以降の数字を

$$(2, 3, 4, \cdots) \longrightarrow (1, 2, 3, \cdots)$$

と対応させれば，$n-1$ 枚の事象に帰着されるため，この場合の総数は c_{n-1} 通り．

イ：$A_1 = 2$ の場合．アと同様に，操作 T_1 は行わず，左から 2 枚目以降の数字を

$$(1, 3, 4, \cdots) \longrightarrow (1, 2, 3, \cdots)$$

と対応させれば，$n-1$ 枚の事象に帰着されるため，この場合の総数も c_{n-1} 通り．

ウ：$A_2 = 1$ の場合．操作 T_1 を行えば，アの状態に帰着されるので，c_{n-1} 通り．

エ：$A_2 = 2$ の場合．操作 T_1 を行えば，イの状態に帰着されるので，c_{n-1} 通り．

ここから，重複を除くことを考える．

$(A_1, A_2) = (1, 2)$ の場合がアとエに，

$(A_1, A_2) = (2, 1)$ の場合がイとウにそれぞれ重複して数え上げられている（総数は c_{n-2} 通り）ので，これを除くと，求める答えは，

$$\boldsymbol{c_n = 4c_{n-1} - 2c_{n-2}}$$