6 複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする．

（1） 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ．

（2） α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

（3） γ を（2）で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

（25　東大・理科）

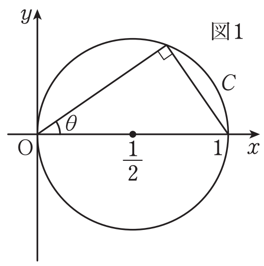
6 数学C【複素変換】標 準

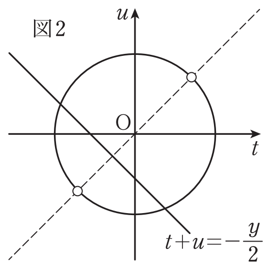
《極方程式との架け橋 (B25) ☆》

▶解答◀ （**1**） C 上の点を，$r>0$ および $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を用いて $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．図 1 より C の極方程式は $r=\cos\theta$ であるから，C 上の点は $z=\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$ とかける．このとき，ド・モアブルの定理より

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)=1-i\tan\theta$$

であるから，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 である．





（**2**）
$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)$$
$$=\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}-i\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)-2i\tan\theta$$
$$=(1-\tan^2\theta)-2i\tan\theta$$

となる．θ が動くと $\tan\theta$ はすべての実数を動くことに注意する．これより，$t, u\ (t\neq u)$ を実数として

$$\frac{1}{\alpha^2}=(1-t^2)-2ti,\ \frac{1}{\beta^2}=(1-u^2)-2ui$$

とかけるから，x, y を実数として

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=x+yi$$

とおくと，$t\neq u$ のもとで

$$x=2-t^2-u^2,\ y=-2(t+u)$$
$$t+u=-\frac{y}{2},\ t^2+u^2=2-x$$

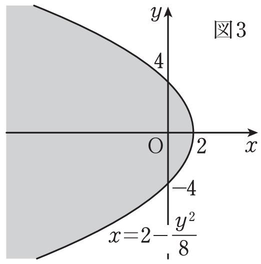
これより，$x\leqq 2$ の範囲において tu 平面上の円 $t^2+u^2=(\sqrt{2-x})^2$ と直線 $t+u=-\dfrac{y}{2}$ が異なる 2 つの共有点をもつ条件を考えて

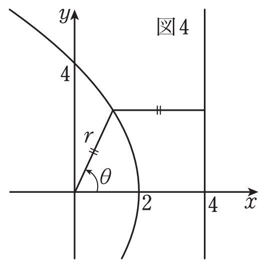
$$\frac{\left|-\dfrac{y}{2}\right|}{\sqrt{1+1}}<\sqrt{2-x}$$
$$|y|<2\sqrt{2}\sqrt{2-x}$$

両辺はともに 0 以上であるから，平方しても同値で

$$y^2<8(2-x) \qquad \therefore\quad x<2-\frac{y^2}{8}$$

これを図示すると，図 3 の境界を含まない網目部分となる．





（**3**）（2）の境界線は，原点を焦点，直線 $x=4$ を準線とする放物線であることから，原点を極として，x 軸を始線とする極方程式を考えると，図 4 より

$$r=4-r\cos\theta \qquad \therefore\quad r=\frac{4}{1+\cos\theta}$$

となる．これより，（2）の領域に属さない複素数 γ を $R>0$ および $-\pi<\theta<\pi$ を用いて $\gamma=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ としたとき，$R\geqq\dfrac{4}{1+\cos\theta}$ である．このとき，

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{R}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

であり，この実部について，$\cos\theta\geqq 0$ のとき

$$\frac{\cos\theta}{R}\leqq\frac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta$$

で等号は境界上で成立している．よって，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部は $\cos\theta=1$ のときに最大値 $\dfrac{1}{4}(1+1)\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．また，$\cos\theta\leqq 0$ のとき

$$\frac{\cos\theta}{R}\geqq\frac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}$$

で等号は境界上で成立している．よって，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部は $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のときに最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{16}}$ をとる．

注意 **【放物線の反転】**

極を焦点に持つような放物線を反転するとカージオイドになる．今回の場合，$r=\dfrac{4}{1+\cos\theta}$ という放物線を反転すると，極方程式 $r=\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)$ で表されるカージオイドという曲線になる．