東京大学・理科

1 座標平面上の点 A(0, 0), B(0, 1), C(1, 1), D(1, 0) を考える．実数 $0 < t < 1$ に対して，線分 AB，BC，CD を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする．さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を U_t とする．また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする．

（1） 点 U_t の座標を求めよ．

（2） t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ．

（3） a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする．t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ．

2 （1） $x > 0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ．

（2） 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

3 平行四辺形 ABCD において，$\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{BC} = b$，$a \leqq b$ とする．次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする．

条件：　点 A，B，C，D はそれぞれ辺 EF，FG，GH，HE 上にある．

ただし，辺はその両端の点も含むものとする．

（1） $\angle \mathrm{BCG} = \theta$ とするとき，S を a, b, θ を用いて表せ．

（2） S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ．

4 この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ．a を正の整数とし，$f_a(x) = x^2 + x - a$ とおく．

（1） n を正の整数とする．$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ．

（2） $f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく．次の条件（ i ），(ii) が同値であることを示せ．

（ i ） $N_a = 1$ である．

（ii） $4a + 1$ は素数である．

5 n を 2 以上の整数とする．1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている．1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える．

(T_i)　左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる．そうでなければ，札の位置をかえない．

最初の状態において札の数字は左から $A_1, A_2, \cdots, A_n$ であったとする．この状態から $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_1), (\mathrm{T}_2), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1})$ を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2), (\mathrm{T}_1)$ を順に行ったところ，札の数字は左から $1, 2, \cdots, n$ と小さい順に並んだ．以下の問いに答えよ．

（1） A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ．

（2） 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の総数を c_n とする．n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ．

6 複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする．

（1） 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ．

（2） α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

（3） γ を（2）で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

1 数学Ⅲ【曲線の長さ】標準

《2 乗に気付くか (B20)》

▶解答◀　混乱がない限り，下付き添字は省略し，U_t を単に U などと書く．

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OS}}+t\overrightarrow{\mathrm{OT}}$

$$=(1-t)\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\}$$

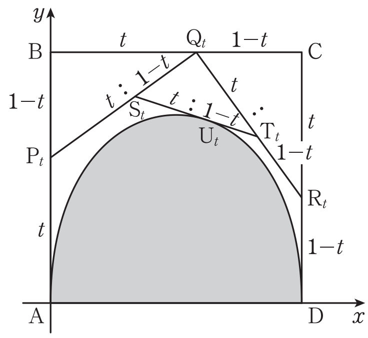
$$+t\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}\}$$

$$=(1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$=(1-t)^2(0,\,t)+2t(1-t)(t,\,1)+t^2(1,\,1-t)$$

$$=(t^2(3-2t),\,3t(1-t))$$

であるから，U の座標は $\boldsymbol{(t^2(3-2t),\,3t(1-t))}$ である．



（2）　$x(t)=t^2(3-2t),\ y(t)=3t(1-t)$ とおく．$0<t<1$ において

$$x'(t)=6t-6t^2=6t(1-t)>0$$

であるから，単調に増加する．よって，U が描く曲線と線分 AD で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^1 3t(1-t)\cdot 6t(1-t)\,dt$$

$$=18\int_0^1(t^4-2t^3+t^2)\,dt$$

$$=18\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$=18\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

（3）　$y'(t)=3-6t=3(1-2t)$ であるから，

$$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=36t^2(1-t)^2+9(1-2t)^2$$

$$=9\{4t^2(1-t)^2+(1-2t)^2\}$$

$$=9(4t^4-8t^3+8t^2-4t+1)$$

$$=9(2t^2-2t+1)^2$$

となる．これより，$0\leqq t\leqq a$ を動くときの U の弧長を $L(a)$ とすると，$0\leqq t\leqq 1$ において

$2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ であることに注意して

$$L(a)=\int_0^a\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}$$

$$=\int_0^a 3(2t^2-2t+1)\,dt=3\left[\frac{2}{3}t^3-t^2+t\right]_0^a$$

$$=\boldsymbol{2a^3-3a^2+3a}$$

2 数学Ⅲ【定積分】やや難

《上下から評価する (C25) ☆》

▶解答◀　（1）　$f(x)=(x-1)-\log x$ とおくと $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ であるから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f(1)=0-\log 1=0$$

であるから，$x>0$ において $f(x)\geqq 0$ となり示された．

（2）　まず，上から評価する．（1）で，x を $\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}$ に置き換えると，

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

であり，

$$n\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\,dx=\frac{n}{2}\left[\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}-x\right]_1^2$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\left(\frac{n}{n+1}2^{\frac{1}{n}+1}-2\right)-\left(\frac{n}{n+1}-1\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}2^{\frac{1}{n}}-1\right)n+\frac{n}{2(n+1)}$$

$$=(2^{\frac{1}{n}}-1)n-\frac{n}{n+1}\cdot 2^{\frac{1}{n}}+\frac{n}{2(n+1)}$$

$$\to\log 2-1+\frac{1}{2}=\log 2-\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

次に下から評価する．相加・相乗平均の不等式より

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq\log\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2n}\log x\quad\cdots\text{②}$$

である．

$$n\int_1^2\frac{1}{2n}\log x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\log x-x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(2\log 2-2+1)=\log 2-\frac{1}{2}$$

①，② より

$$n\int_1^2\frac{1}{2n}\log x\,dx\leqq n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$$

$$\leqq n\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\,dx$$

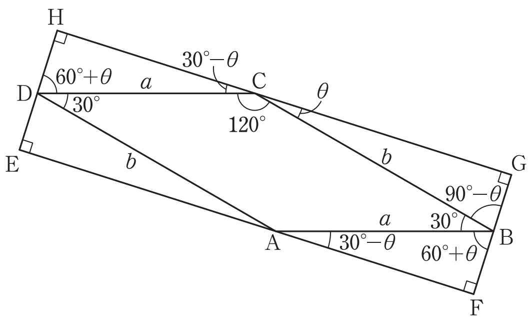
であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx = \mathbf{\log 2-\frac{1}{2}}$$

3 数学Ⅱ【三角関数の図形への応用】標 準

《落ち着いて変形 (B20)》

▶解答◀ （1） $\angle \mathrm{BCG}=\theta$ として，それぞれの角度を図に表すと次のようになる．条件を満たすとき，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ である．スペースが狭いので，図中では度数法で表記した．



この図より

$$\mathrm{CH}=a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),\ \mathrm{GC}=b\cos\theta,$$

$$\mathrm{GB}=b\sin\theta,\ \mathrm{BF}=a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$$

である．よって，

$$S=\mathrm{GH}\cdot\mathrm{GF}$$
$$=\boldsymbol{\left(a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b\cos\theta\right)}$$
$$\boldsymbol{\times\left(a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b\sin\theta\right)}$$

（2） （1）の結果より，

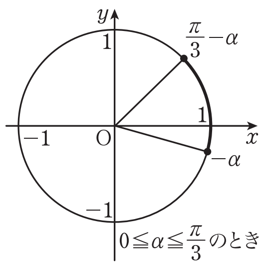
$$S=a^2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b^2\cos\theta\sin\theta$$
$$+ab\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\theta\right\}$$
$$=\frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{b^2}{2}\sin 2\theta+ab\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+\frac{b^2}{2}\sin 2\theta+\frac{ab}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cos 2\theta+\left(b^2-\frac{a^2}{2}\right)\sin 2\theta+ab\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\cos(2\theta-\alpha)+\frac{1}{2}ab$$

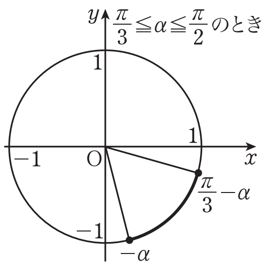
ただし，α は第 1 象限の角で，

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}},$$

$$\sin\alpha=\frac{2b^2-a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ より，$-\alpha\leqq 2\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}-\alpha$ である．





$\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}$ を解く．$\tan\alpha\leqq\tan\dfrac{\pi}{3}$ で

$$\frac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}\leqq\sqrt{3}$$

$$2b^2-a^2\leqq 3a^2 \qquad \therefore\quad b^2\leqq 2a^2$$

すなわち，$\boldsymbol{a\leqq b\leqq\sqrt{2}a}$ のとき，S は $\theta=\dfrac{\alpha}{2}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}+\dfrac{1}{2}ab}$ をとる．また，$\boldsymbol{b\geqq\sqrt{2}a}$ のとき，S は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(b^2-\frac{a^2}{2}\right)+ab\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{1}{2}ab}$$

をとる．

4 数学A【整数問題の雑題】やや難

《素数の判定法 (C25) ☆》

▶解答◀ （1） $n>a$ と仮定すると

$$f_a(n)-n^2=n-a>0$$

である．さらに，$n,\ a$ は正の整数より

$$(n+1)^2-f_a(n)=n+a+1>0$$

これより，$n>a$ のとき

$$n^2<f_a(n)<(n+1)^2$$

となるが，n^2 と $(n+1)^2$ の間に平方数は存在せず，$f_a(n)$ が平方数であることに矛盾する．よって $n\leqq a$ である．

（2） 以下，文字はすべて整数とする．$f_a(a)=a^2$ であることから，$n,\ m$ についての不定方程式 $f_a(n)=m^2$ の解として $(n,\ m)=(a,\ a)$ がある．これを自明な解と呼ぶことにすると，（ i ）は，$f_a(n)=m^2$ が非自明な解を持たないということである．ここで，$f_a(n)=m^2$ とかけるとき，

$$n^2+n-a=m^2 \qquad \therefore\quad a=n^2+n-m^2$$

となるから，

$$4a+1=4(n^2+n-m^2)+1$$
$$=(2n+1)^2-(2m)^2$$
$$=(2n+2m+1)(2n-2m+1)$$

であり，$4a+1=AB\,(A>B)$ と積の形で書くと，

$$2n+2m+1=A,\ 2n-2m+1=B$$

$$n=\frac{A+B-2}{4},\ m=\frac{A-B}{4}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．ここで，$4a+1$ は 4 で割って 1 余るから，A, B を 4 で割った余りはともに 3 かともに 1 かのいずれかであり $A+B-2,\ A-B$ はともに 4 の倍数になるから，n, m は整数になる．これより，p が素数ならば $A=4a+1,\ B=1$ となって ① は自明な解のみを与えるし，p が合成数ならば $(A, B)\neq(4a+1, 1)$ なる (A, B) が存在して，① によって非自明な解が与えられる．これより，(ii) は $f_a(n)=m^2$ が非自明な解を持たないことと同値である．

よって，(i) と (ii) は同値である．

5 数学B【場合の数と漸化式】やや難

《拡張させるか帰着させるか (C25) ☆》

▶解答◀ (1) 1 回目の (T_1) の操作後，一番左の数字は A_1, A_2 のいずれかである．そこから $(\mathrm{T}_2), (\mathrm{T}_3), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2)$ の操作中，一番左の数字は入れ替わることはなく，最後の (T_1) の操作によって，左から 1 番目のままか 2 番目に移る．

したがって，操作終了後，左から 1 から順で並ぶということは，A_1, A_2 のいずれかは必ず 1 か 2 になっていなくてはならない．これより，題意は示された．

(2) (1) が誘導になっているので，その誘導をうまく使いたい．(1) より，$A_1=1, 2$ もしくは $A_2=1, 2$ であるため，この 4 パターンで場合分けをして考える．

ア：$A_1=1$ の場合．操作 T_1 は行わず，左から 2 枚目以降の数字を

$$(2, 3, 4, \cdots)\longrightarrow(1, 2, 3, \cdots)$$

と対応させれば，$n-1$ 枚の事象に帰着されるため，この場合の総数は c_{n-1} 通り．

イ：$A_1=2$ の場合．アと同様に，操作 T_1 は行わず，左から 2 枚目以降の数字を

$$(1, 3, 4, \cdots)\longrightarrow(1, 2, 3, \cdots)$$

と対応させれば，$n-1$ 枚の事象に帰着されるため，この場合の総数も c_{n-1} 通り．

ウ：$A_2=1$ の場合．操作 T_1 を行えば，アの状態に帰着されるので，c_{n-1} 通り．

エ：$A_2=2$ の場合．操作 T_1 を行えば，イの状態に帰着されるので，c_{n-1} 通り．

ここから，重複を除くことを考える．

$(A_1, A_2)=(1, 2)$ の場合がアとエに，

$(A_1, A_2)=(2, 1)$ の場合がイとウにそれぞれ重複して数え上げられている（総数は c_{n-2} 通り）ので，これを除くと，求める答えは，

$$\boldsymbol{c_n=4c_{n-1}-2c_{n-2}}$$

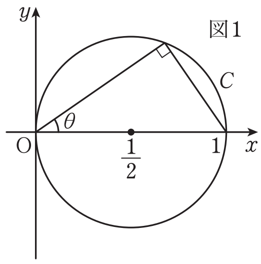
6 数学C【複素変換】標準

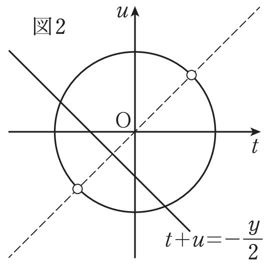
《極方程式との架け橋 (B25) ☆》

▶解答◀ (1) C 上の点を，$r>0$ および $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ を用いて $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．図 1 より C の極方程式は $r=\cos\theta$ であるから，C 上の点は $z=\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$ とかける．このとき，ド・モアブルの定理より

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)=1-i\tan\theta$$

であるから，$\frac{1}{z}$ の実部は 1 である．





(2)
$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}(\cos2\theta-i\sin2\theta)$$
$$=\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}-i\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)-2i\tan\theta$$
$$=(1-\tan^2\theta)-2i\tan\theta$$

となる．θ が動くと $\tan\theta$ はすべての実数を動くことに注意する．これより，$t, u\ (t\neq u)$ を実数として

$$\frac{1}{\alpha^2}=(1-t^2)-2ti,\ \ \frac{1}{\beta^2}=(1-u^2)-2ui$$

とかけるから，x, y を実数として

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=x+yi$$

とおくと，$t\neq u$ のもとで

$$x=2-t^2-u^2,\ \ y=-2(t+u)$$

$$t+u=-\frac{y}{2},\ t^2+u^2=2-x$$

これより，$x\leqq2$ の範囲において tu 平面上の円 $t^2+u^2=(\sqrt{2-x})^2$ と直線 $t+u=-\frac{y}{2}$ が異なる 2 つの共有点をもつ条件を考えて

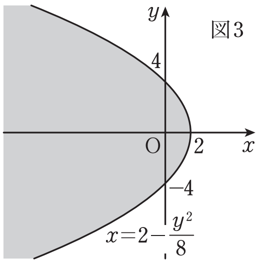
$$\frac{\left|-\frac{y}{2}\right|}{\sqrt{1+1}}<\sqrt{2-x}$$

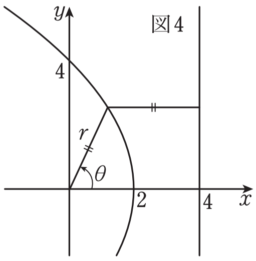
$$|y|<2\sqrt{2}\sqrt{2-x}$$

両辺はともに 0 以上であるから，平方しても同値で

$$y^2<8(2-x)\qquad\therefore\ \ x<2-\frac{y^2}{8}$$

これを図示すると，図 3 の境界を含まない網目部分となる．





（3）（2）の境界線は，原点を焦点，直線 $x=4$ を準線とする放物線であることから，原点を極として，x 軸を始線とする極方程式を考えると，図 4 より

$$r=4-r\cos\theta \qquad \therefore\quad r=\frac{4}{1+\cos\theta}$$

となる．これより，（2）の領域に属さない複素数 γ を $R>0$ および $-\pi<\theta<\pi$ を用いて

$\gamma=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ としたとき，$R\geqq\dfrac{4}{1+\cos\theta}$ である．このとき，

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{R}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

であり，この実部について，$\cos\theta\geqq 0$ のとき

$$\frac{\cos\theta}{R}\leqq\frac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta$$

で等号は境界上で成立している．よって，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部は $\cos\theta=1$ のときに最大値 $\dfrac{1}{4}(1+1)\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．また，$\cos\theta\leqq 0$ のとき

$$\frac{\cos\theta}{R}\geqq\frac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}$$

で等号は境界上で成立している．よって，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部は $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のときに最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{16}}$ をとる．

注意【放物線の反転】

極を焦点に持つような放物線を反転するとカージオイドになる．今回の場合，$r=\dfrac{4}{1+\cos\theta}$ という放物線を反転すると，極方程式 $r=\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)$ で表されるカージオイドという曲線になる．

要の分析　**1**，**3**，**6** は多少険しいところもあるが一本道であり，標準的である．**2** は下からの評価に工夫が必要だし，**4**，**5** は試験場では難しく見えるだろう．昨年と同様に高い水準が要求される．完答はしにくくなったかもしれない．

（椎茸，Sakura）