1 正の実数 k および $\alpha < \beta$ となる実数 α, β が次の条件を満たすように動く．

条件：座標平面上の放物線 $C : y = k(x-\alpha)(\beta - x)$ の頂点は $(-3, 1)$ であり，C は y 軸と $-2 \leqq y \leqq 0$ の範囲で交わる．

このとき，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ．（26　東大・文科）

1

数学Ⅱ【面積】標準

《まずは落ち着いて 1 題 (B15)》

▶解答◀ C について

$$y = k\{-x^2 + (\alpha+\beta)x - \alpha\beta\}$$
$$= k\left\{-\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - \alpha\beta\right\}$$
$$= k\left\{-\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right\}$$

であり，頂点の座標が $(-3, 1)$ であることから，

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = -3,\ \frac{k(\alpha-\beta)^2}{4} = 1$$
$$\alpha + \beta = -6 \quad \cdots\cdots ①$$
$$(\alpha-\beta)^2 = \frac{4}{k} \quad \cdots\cdots ②$$

また，② において

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$$

であることから，① を代入すると

$$36 - 4\alpha\beta = \frac{4}{k} \qquad \therefore\quad \alpha\beta = 9 - \frac{1}{k} \quad \cdots\cdots ③$$

また，C の y 切片について，③ も合わせると

$$-2 \leqq -k\alpha\beta \leqq 0$$
$$0 \leqq 9k - 1 \leqq 2 \qquad \therefore\quad \frac{1}{9} \leqq k \leqq \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ④$$

このとき，C と x 軸で囲まれる図形の面積は

$$S = \int_\alpha^\beta k(x-\alpha)(\beta-x)\,dx$$
$$= \frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{k}{6}\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{k}}$$

④ の範囲で S は単調減少だから S のとりうる値の範囲は

$$\frac{4}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} \leqq S \leqq \frac{4}{3\sqrt{\frac{1}{9}}} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{3}} \leqq S \leqq 4}$$