3　$0<a<1$ とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3$$

と定める．

また，関数 $g(x)$ を次のように定める．整数 n に対し，

$2n \leqq x < 2n+1$ のとき　　$g(x)=x-2n$

$2n+1 \leqq x < 2n+2$ のとき　　$g(x)=-x+2n+2$

とする．

（1） $x \geqq 4$ において $f(x)>g(x)$ を示せ．

（2） $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ とする．座標平面上の $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの $x \geqq 0$ の範囲における共有点の個数を求めよ．

（26　東大・文科）

3

数学Ⅰ【2次関数】**標準**

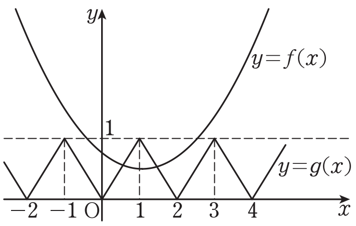
《地道に危ないところを調べる (B30)》

▶解答◀ （1） $g(x)$ は周期 2 の周期関数であり

$0 \leqq x \leqq 1$ において $g(x)=x$

$1 \leqq x \leqq 2$ において $g(x)=-x+2$

であるから，$y=g(x)$ は図のように $y=0$ と $y=1$ を往復するジグザグとなる．



$4 \leqq x \leqq 5$ のときはギリギリそうだから慎重になる必要がある．後回しにする．$x \geqq 5$ では余裕がありそうだから，まず $x \geqq 5$ において $f(x)>1$ であることを示す．$0<a<1$, $x \geqq 5$ においては，相加・相乗平均の不等式を用いると，

$$f(x) \geqq \frac{a}{8}(5-1)^2+\frac{2}{a}-3$$

$$=2a+\frac{2}{a}-3 \geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{2}{a}}-3$$

$$=2\cdot 2-3=1$$

（相加・相乗平均の不等式の等号は $0<a<1$ では成立しない）であることから，$x \geqq 5$ では $f(x)>1 \geqq g(x)$ であることが示せた．

次に，$4 \leqq x \leqq 5$ のときを示す．この範囲では $g(x)=x-4$ である．このとき

$$f(x)-g(x)$$

$$=\frac{a}{8}(x^2-2x+1)+\frac{2}{a}-3-x+4$$

$$=\frac{a}{8}\left\{x^2-2\left(\frac{4}{a}+1\right)x\right\}+\frac{a}{8}+\frac{2}{a}+1$$

$$=\frac{a}{8}\left\{x-\left(\frac{4}{a}+1\right)\right\}^2-\frac{a}{8}\left(\frac{4}{a}+1\right)^2$$

$$+\frac{a}{8}+\frac{2}{a}+1 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$0<a<1$ のとき，この軸 $x=\dfrac{4}{a}+1$ は 5 より大きいから，$4 \leqq x \leqq 5$ においては $f(x)-g(x)$ は $x=5$ で最小値をとる．上で示したことより，$x=5$ のとき $f(5)-g(5)>0$ であるから，$4 \leqq x \leqq 5$ においても $f(x)>g(x)$ である．

（2） $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ のとき，頂点の y 座標は

$$\frac{2}{\frac{2}{3}}-3<y<\frac{2}{\frac{1}{2}}-3 \qquad \therefore\ 0<y<1$$

である．これより，$0 \leqq x \leqq 1$, $1 \leqq x \leqq 2$ にそれぞれ 1 つずつ共有点をもつ．あとは，$2 \leqq x \leqq 3$, $3<x \leqq 4$ で共有点をもつかを調べる

- $3<x \leqq 4$ に共有点をもつ条件は

$$f(3)<1$$

$$\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-3<1 \qquad \therefore\ a^2-8a+4<0$$

$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ も合わせると，$4-2\sqrt{3}<a<\dfrac{2}{3}$ ……②

であり，このとき $2 \leqq x \leqq 3$ にも共有点をもつ．

- $2 \leqq x \leqq 3$ において，$y=f(x)$ と $y=x-2$ が共有点をいくつもつか調べる．① を見ると，$f(x)-g(x)$ の軸は $x=1+\dfrac{4}{a}$ であり，$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ において，軸は $1+\dfrac{4}{\frac{2}{3}}=7$ より大きいから，$2 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)-g(x)$ の最小値は

$$f(3)-g(3)=f(3)-1$$

となる．これより，$2 \leqq x \leqq 3$ で共有点をもち，

$3 < x \leqq 4$ では共有点をもたない条件は，$(3, 1)$ が共有点となる $f(3) - 1 = 0$，すなわち $a = 4 - 2\sqrt{3}$ である．

よって，（1）も合わせると，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の $x \geqq 0$ における共有点の個数は

$$\frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$a = 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき } 3 \text{ 個}$$

$$4 - 2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3} \text{ のとき } 4 \text{ 個}$$