1 （1） 関数 $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ の区間 $-1\leqq\theta\leqq 1$ における最大値 M および最小値 m を求めよ．

（2）（1）で定めた M に対し，次の不等式を示せ．

$$\frac{7}{8}\pi\leqq\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx\leqq\frac{7}{8}\pi+4M$$

（26　東大・理科）

1

数学Ⅲ【積分の雑題】 やや難

《偶関数・奇関数の利用 (C35) ☆》

▶解答◀ （1） $f(-\theta)=-f(\theta)$ より，$f(\theta)$ は奇関数であるから，$0\leqq\theta\leqq 1$ で考える．

$$f'(\theta)=\cos\theta-1+\frac{\theta^2}{2}$$

$$f''(\theta)=-\sin\theta+\theta\geqq 0$$

($\theta\geqq 0$ で $\theta\geqq\sin\theta$ を用いた）であるから，この範囲で $f'(\theta)$ は単調増加で，

$$f'(0)=1-1+0=0$$

であるから，$f'(\theta)\geqq 0$ となる．これより $0\leqq\theta\leqq 1$ で $f(\theta)$ は単調増加であるから

$$M=f(1)=\sin 1-1+\frac{1}{6}=\mathbf{\sin 1-\frac{5}{6}}$$

$$m=-M=\mathbf{-\sin 1+\frac{5}{6}}$$

（2） 中辺の積分を I とおき，I において $t=x-\pi$ とすると $dt=dx$ であり

x	$0\to 2\pi$
t	$-\pi\to\pi$

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\{\cos(t+\pi)-(t+\pi)\}\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(-\cos t-t-\pi)\,dt\\&=-\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\cos t+t+\pi)\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\cos t+t)\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(\cos t)\cos t+\cos(\cos t)\sin t\}\,dt\end{aligned}$$

ここで，$\sin(\cos t)\cos t$ は偶関数，$\cos(\cos t)\sin t$ は奇関数であるから，

$$I=2\int_0^{\pi}\sin(\cos t)\cos t\,dt$$

この積分において，t を $\pi-t$ に置き換えても

$$\begin{aligned}\sin(\cos(\pi-t))\cos(\pi-t)&=\sin(-\cos t)(-\cos t)\\&=\sin(\cos t)\cos t\end{aligned}$$

で値が変わらないことから，$t=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称で，

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)\cos t\,dt$$

となる．ここで，（1）より

$$0\leqq\sin\theta-\theta+\frac{\theta^3}{6}\leqq M$$

であり，$\theta=\cos t$ とすることで

$$\cos t-\frac{\cos^3 t}{6}\leqq\sin(\cos t)\leqq\cos t-\frac{\cos^3 t}{6}+M$$

が得られる．$s=\sin t,\ c=\cos t$ とする．

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(c-\frac{c^3}{6}\right)c\,dt$$

とおくと，$c>0$ に注意して

$$4J<I<4\left(J+\int_0^{\frac{\pi}{2}}M\cos t\,dt\right)=4(J+M)\quad\cdots①$$

となる．あとは J を計算する．

$$\begin{aligned}\left(c-\frac{c^3}{6}\right)c&=c^2-\frac{c^4}{6}\\&=\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\\&=\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{1}{24}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\\&=\frac{7}{16}+\frac{5}{12}\cos 2t-\frac{1}{48}\cos 4t\end{aligned}$$

となるから，$J=\dfrac{7}{16}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{7}{32}\pi$ である．

よって ① より

$$\frac{7}{8}\pi<I<\frac{7}{8}\pi+4M$$

が示された．