2 n を正の整数とする．座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x,\ y) \mid x,\ y \text{ は } 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる３点を選ぶ．ただし，どの３点も等確率で選ばれるものとする．選んだ３点が三角形の３頂点となる確率を p_n とする．

（１） p_5 を求めよ．

（２） m を２以上の整数とする．p_{2m} を求めよ．　（26　東大・文理共通）

2

数学A【確率の雑題】標 準

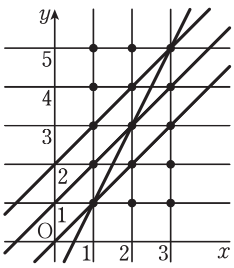
《事象を正しく捉える (B20) ☆》

▶解答◀ （１） 余事象を考える．３点の組合せは ${}_{15}\mathrm{C}_3$ 通りある．選んだ３点が三角形の３頂点にならないのは，３点が同一直線上に並ぶ場合である．この直線の引き方がポイントである．x 軸，y 軸それぞれに平行な場合以外に，傾きが０以外の場合も考慮が必要である．

（ア） x 軸に平行な場合：$x=1,\ 2,\ 3$ の直線との交点となるように３点がとれ，$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の５通り．

（イ） y 軸に平行な場合：$1 \leqq y \leqq 5$ のうちの３点の組合せは ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りあり，$x=1,\ 2,\ 3$ のどれかで３通りあるから，${}_5\mathrm{C}_3 \cdot 3 = 30$ 通り．

（ウ） 傾きが０以外の場合：$x=1,\ 2,\ 3$ 上からそれぞれ１点ずつ選ばれる．格子点間の傾きは整数であり，傾きが正の場合を考える．傾きが１の場合は図の通り３本引ける．また，傾きが２の場合，$(1,\ 1)$ と $(5,\ 5)$ を結ぶ直線１本のみである．傾きが負の場合も同様で，合わせて $(3+1) \cdot 2 = 8$ 通り．



したがって

$$p_5 = 1 - \frac{5+30+8}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = 1 - \frac{43}{455} = \mathbf{\frac{412}{455}}$$

（２） （１）と同様にして，x 軸，y 軸と平行な場合は容易だが，問題は傾きが０以外の場合である．

（ア） x 軸と平行な場合：$y=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m$ の $2m$ 通り．

（イ） y 軸と平行な場合：$1 \leqq y \leqq 2m$ のうちの３点の組合せは ${}_{2m}\mathrm{C}_3$ 通りあり，$x=1,\ 2,\ 3$ のどれかで３通りあるから，これは

$${}_{2m}\mathrm{C}_3 \cdot 3 = \frac{2m(2m-1)(2m-2)}{3 \cdot 2} \cdot 3$$

$$= 2m(m-1)(2m-1) \text{ 通り}$$

（ウ） 傾き（$=a$ とおく）が０以外の場合

$|a|$ の最大値と，それぞれの a に対して何本直線が引けるのかを考える．傾きが負の場合も正の場合と同じ数だけあるから，以降 $a>0$ として考える．

同一直線上に３点が並ぶ場合で考えられる傾きは，$(1,\ 1)$ と $(3,\ 2m)$ を結んだ直線の傾き以下であるから，直線を $y=ax+b$ とおくと，とりうる a の範囲は

$$0 < a < \frac{2m-1}{2}$$

a は整数であるから，$1 \leqq a \leqq m-1$

また，それぞれの a に対して引ける直線の本数は，y 切片 b（整数）の個数に対応する．b の最小値は直線が $(1,\ 1)$ を通るときで，$b=1-a$ である．最大値は直線が $(3,\ 2m)$ を通るときで，$b=2m-3a$ である．これより，b の範囲は

$$1-a \leqq b \leqq 2m-3a$$

であり，この範囲に含まれる整数 b の個数は

$$(2m-3a)-(1-a)+1 = 2m-2a$$

である．したがって，負の場合も合わせると，引ける直線の総数は

$$2\sum_{a=1}^{m-1}(2m-2a) = 4\sum_{a=1}^{m-1}(m-a)$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}m(m-1) = 2m(m-1) \text{ 通り}$$

以上，（ア）〜（ウ）より

$$p_{2m} = 1 - \frac{2m+2m(m-1)(2m-1)+2m(m-1)}{{}_{6m}\mathrm{C}_3}$$

$$= 1 - \frac{2m\{1+(m-1)(2m-1)+m-1\}}{m(6m-1)(6m-2)}$$

$$= 1 - \frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}$$

$$= \mathbf{\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}}$$