3 座標空間内の原点を中心とする半径 5 の球面を S とする．S 上の相異なる 3 点 P，Q，R が次の条件を満たすように動く．

条件：P，Q は xy 平面上にあり，三角形 PQR の重心は G(2, 0, 1) である．

以下の問いに答えよ．

（1） 線分 PQ の中点 M の軌跡を xy 平面上に図示せよ．

（2） 線分 PQ が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ．（26 東大・理科）

3

数学C【2 次曲線の雑題】**標 準**

《線分の通過領域（B30）》

▶解答◀ （**1**） S の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=25$$

である．P，Q は xy 平面上にあるので， $\mathrm{P}(x_1, y_1, 0)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2, 0)$ とおける．また，$\mathrm{R}(x_3, y_3, z_3)$ とおくと，R は S 上の点より

$$x_3{}^2+y_3{}^2+z_3{}^2=25 \quad \cdots\cdots①$$

である．また，重心の条件より

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2 \qquad \therefore\ x_1+x_2+x_3=6 \quad \cdots②$$

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0 \qquad \therefore\ y_1+y_2+y_3=0 \quad \cdots③$$

$$\frac{0+0+z_3}{3}=1 \qquad \therefore\ z_3=3$$

である．さらに，PQ の中点 M を $\mathrm{M}(X, Y)$ とおくと

$$X=\frac{x_1+x_2}{2},\ Y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

であるから ②，③ より

$$X=\frac{6-x_3}{2},\ Y=\frac{-y_3}{2}$$

$$x_3=6-2X,\ y_3=-2Y$$

であり，これらを ① に代入して

$$(6-2X)^2+(-2Y)^2+3^2=25$$

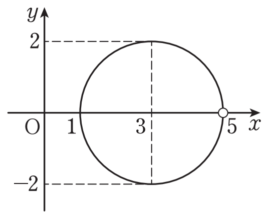
$$(3-X)^2+Y^2=4$$

$$X^2-6X+Y^2+5=0 \quad \cdots\cdots④$$

$$(X-3)^2+Y^2=4$$

これだとまだ，xy 平面上の 2 点 P，Q と S 上の点 R に対して，三角形 PQR の重心が (2, 0, 1) となるときの PQ の中点 M の軌跡を求めただけであり，このような P，Q が S 上に取れるかはわからない．しかし，M がこの軌跡上にあるとき，M を通り OM に垂直な直線と S と xy 平面の交円 $C : x^2+y^2=25$ の交点をそれぞれ P，Q とすることによって，P，Q を確かに C 上にとることができる．ただし，P，Q が相異なることから，(5, 0) は除く．

よって，M の軌跡は下図の実線部分（ただし，白丸を除く）である．



（**2**） 直線 PQ の法線ベクトルの 1 つが $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(X, Y)$ であり，M を通ることも合わせると，直線 PQ の方程式は

$$X(x-X)+Y(y-Y)=0$$

$$X^2+Y^2-xX-yY=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

となるから，④ かつ ⑤ を満たす (X, Y) が存在する条件を考える．④ − ⑤ より

$$(x-6)X+yY+5=0 \quad \cdots\cdots⑥$$

であり，④ かつ ⑥ を満たす (X, Y) が存在する条件は，XY 上の直線 ⑥ と中心 (3, 0)，半径 2 の円 ④ が共有点をもつことであるから

$$\frac{|3(x-6)+5|}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}} \leqq 2$$

$$|3x-13| \leqq 2\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

両辺はともに正より平方して

$$(3x-13)^2 \leqq 4\{(x-6)^2+y^2\}$$

$$5x^2-30x-4y^2+25 \leqq 0$$

$$5(x-3)^2-4y^2 \leqq 20$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5} \leqq 1$$

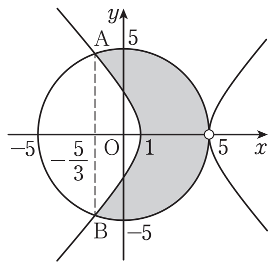
これと円 $x^2+y^2 \leqq 25$ の共通部分を考えると，線分 PQ の通過領域は図のようになる．ただし，（1）で M は (5, 0) を除いているから，線分 PQ の通過領域からも (5, 0) は除かれる．

$5(x-3)^2-4y^2=20$ と $x^2+y^2=25$ の共有点を求める．y^2 を消去すると

$$5(x-3)^2-4(25-x^2)=20$$

$$9x^2 - 30x - 75 = 0$$

$$(3x+5)(x-5) = 0 \qquad \therefore \quad x = -\frac{5}{3},\ 5$$



これより図中の A，B の x 座標はともに $-\dfrac{5}{3}$ である.