4 k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y=x^3-kx$ で定める．C 上の2点P，Qに対する以下の条件(＊)を考える．

条件(＊) 原点O，点P，点Qは相異なり，C のO，P，Qにおける接線のうち，どの2本も交わり，そのなす角はすべて $\frac{\pi}{3}$ となる．

ただし，2直線のなす角は0以上 $\frac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする．

（1） 条件(＊)を満たすP，Qが存在するような k の範囲を求めよ．

（2） k が（1）で定まる範囲にあるとする．P，Qが条件(＊)を満たすように動くとき，C のO，P，Qにおける接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく．ただし，3本の接線が1点で交わるときは $S=0$ とする．$M=4m$ となる k の値を求めよ．　（26 東大・文理共通）

4 数学Ⅱ【接線または法線】やや難

《接線3本が正三角形をなす（C30）☆》

▶解答◀ $C: y=x^3-kx$ に対して，$y'=3x^2-k$ である．P，Qの x 座標を p, q とし，O，P，Qにおける接線を l_0, l_p, l_q とする．C に引ける接線のうち傾きが最も小さいものは l_0 で，その傾きは $-k$ であることに注意する．

（**1**） 3つの接線が正三角形を囲むためには，

一番傾きの小さいものの傾きは負，一番傾きの大きいものの傾きは正 ……………………………………………①

であることが必要である．l_0 の方向ベクトルと x 軸方向のなす角を θ とすると，l_p, l_q の方向ベクトルと x 軸方向のなす角はそれぞれ $\theta+\frac{\pi}{3}, \theta+\frac{2\pi}{3}$ となる（l_p と l_q は逆でも良いが，上のようにして一般性を失わない）．上で述べた傾きの条件①から，

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<0,\ 0<\theta+\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{6} \quad \cdots\cdots②$$

である．いま，$-k=\tan\theta$ であるから，②より

$$-k<-\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ k>\frac{1}{\sqrt{3}}$$

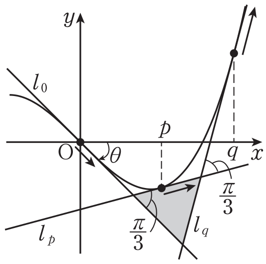
が必要である．ここからは，$k>\frac{1}{\sqrt{3}}$ ならば l_0 とともに正三角形をなす2本の接線 l_p, l_q が確かに存在する（十分条件である）ことを示す．いま，l_p と l_q が正三角形をなす条件は

$$3p^2-k=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots③$$

$$3q^2-k=\tan\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots④$$

であり，$k>\frac{1}{\sqrt{3}}$ のもとで p, q を動かしたとき，各式の左辺（すなわち l_p, l_q の傾き）は $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 以上の任意の値を取れる．これより，最も小さな傾きを持つ接線 l_0 に対応する θ に対して，この式を満たす実数 p, q は確かに存在し，l_0 と正三角形を囲む接線 l_p, l_q が必ず存在することが示された．

よって，（＊）を満たすP，Qが存在するような k の範囲は $\boldsymbol{k>\frac{1}{\sqrt{3}}}$ である．



（**2**） $p\neq 0, q\neq 0$ としてよい．一般の $x=t$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-k)(x-t)+t^3-kt$$

$$y=(3t^2-k)x-2t^3$$

であるから，

$$l_0: y=-kx,\ l_p: y=(3p^2-k)x-2p^3$$

$$l_q: y=(3q^2-k)x-2q^3$$

となる．ここで，l_0 と l_p を連立すると

$$-kx=(3p^2-k)x-2p^3 \qquad \therefore\ x=\frac{2}{3}p$$

であるから，l_0 と l_p の交点Pの x 座標は $\frac{2}{3}p$ である．同様の計算によって l_0 と l_q の交点Qの x 座標は $\frac{2}{3}q$ である．これより，3本の接線が正三角形をなしているとき，1辺の長さ d は $d=\frac{2}{3}|p-q|\sqrt{1+k^2}$ であり，正三角形の面積は

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}d^2=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p-q)^2$$

とわかる．k は固定されているから，p, q も固定されているのではないかと考えるだろうが，それは違って

いる．③，④ を見ると，p, q は 2 次方程式の解だからプラマイで現れる．改めて ③ の解を P, $-P$，④ の解を Q, $-Q$ とおく．$P<Q$ であるとしてもよく，このとき $\left|p-q\right|$ の最大値は $Q-(-P)=P+Q$，最小値は $Q-P$ となる．$M=4m$ となるとき，

$$(P+Q)^2=4(Q-P)^2$$

$$3P^2-10PQ+3Q^2=0$$

$$(P-3Q)(3P-Q)=0 \qquad \therefore \quad P=3Q,\ \frac{Q}{3}$$

$0<P<Q$ より $P=\dfrac{Q}{3}$ となる．ここで，やっと P, Q を k で表す．③ および $\tan\theta=-k$ より

$$3p^2-k=\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}$$

$$3p^2=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{1+\sqrt{3}k}$$

である．$\sqrt{3}$ を $-\sqrt{3}$ に置き換えることで，

$$3q^2=\frac{-\sqrt{3}(1+k^2)}{1-\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{\sqrt{3}k-1}$$

となる．$P=\dfrac{Q}{3}$ より $9P^2=Q^2$ であるから

$$\frac{3\sqrt{3}(1+k^2)}{1+\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{3(\sqrt{3}k-1)}$$

$$9(\sqrt{3}k-1)=1+\sqrt{3}k \qquad \therefore \quad k=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$$