5 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．複素数 α と C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対し，$w=(z-\alpha)^3$ とおく．P が C 上を動くときの点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡を D とする．

（1） $\alpha=-3$ とし，w の偏角を θ とおく．P が C 上を動くとき，$\sin\theta$ がとりうる値の範囲を求めよ．

（2） α が次の条件を満たすように動く．

条件：D は実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つ．

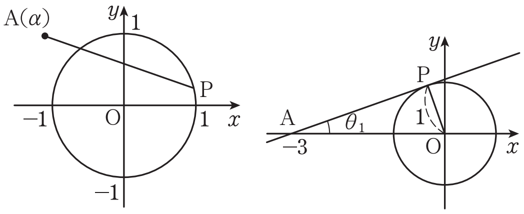
複素数平面上の点 $\mathrm{R}(\alpha)$ が動きうる範囲の面積を求めよ． （26 東大・理科）

5

数学Ⅲ【複素数と図形】 やや難

《正三角形の網目（C30）☆》

▶解答◀ （**1**） $w=(z+3)^3$ である．$\mathrm{A}(\alpha)$ としたとき，図より $\angle\mathrm{PAO}\leqq\theta_1$（ただし，$\theta_1$ は $\sin\theta_1=\dfrac{1}{3}$ を満たす，30° 未満の角である）



$$|\arg(z-\alpha)|\leqq\theta_1$$

$$|\theta|=|\arg w|=3|\arg(z-\alpha)|\leqq 3\theta_1(<90^\circ)$$

となるから，$\sin\theta$ がとりうる値の範囲は

$$|\sin\theta|\leqq\sin 3\theta_1=3\sin\theta_1-4\sin^3\theta_1$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{27}=\frac{23}{27}$$

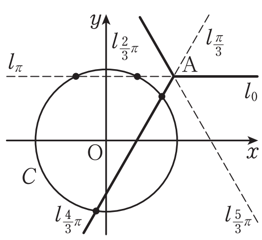
よって，$\boldsymbol{-\dfrac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{23}{27}}$ である．

（**2**） 条件を満たすとき，$\arg w=0,\pi$ かつ $w\neq 0$ となる w が存在する．すなわち，$z\neq\alpha$ かつ

$$\arg(z-\alpha)=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \quad\cdots\cdots①$$

$$\arg(z-\alpha)=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi \quad\cdots\cdots②$$

となる z が C 上に存在するということである．



A から放射状に伸びる太線（太線上の点 z は ① を満たす）と，点線（点線上の点 z は ② を満たす）のいずれとも C が交わるような A の存在範囲を考える．これは C が隣り合う太線と点線のいずれとも交わることと同値である．

まず，C が半直線 l_0（太線）と $l_{\frac{\pi}{3}}$（点線）のいずれとも交わるような A の存在範囲を考える．それは，図 1 の網目部分となる．また，半直線 l_0（太線）と $l_{\frac{5}{3}\pi}$（点線）のいずれとも C が交わるような A の範囲は図 1 の網目部を x 軸に関して折り返した斜線部になる．

図 1 の網目部と斜線部を $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転させたものが，半直線 $l_{\frac{2}{3}\pi}$ とそれに隣り合う点線と C が交わるような A の存在範囲であり，図 1 の網目部と斜線部を $\dfrac{4}{3}\pi$ だけ回転させたものが，半直線 $l_{\frac{4}{3}\pi}$ とそれに隣り合う点線と C が交わるような A の存在範囲である．

よって，A の存在範囲をまとめると，図 2 の網目部分となり，これは 1 辺が $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形 12 個分だから，その面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot 12=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$$

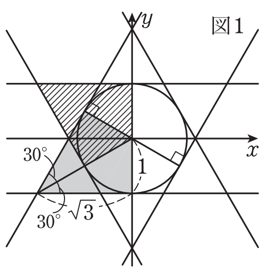


図1

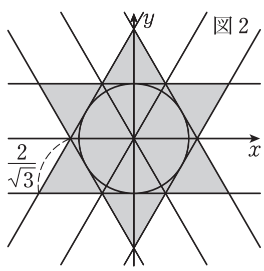


図2