6 n を正の整数とする．n の正の約数のうち，3 で割って 1 余るものの個数を $f(n)$，3 で割って 2 余るものの個数を $g(n)$ とする．

（1） $f(2800)$, $g(2800)$ を求めよ．

（2） $f(n) \geqq g(n)$ を示せ．

（3） $g(n) = 15$ であるとき，$f(n)$ がとりうる値を求めよ．　（26　東大・理科）

6 数学A【整数問題の雑題】難！

《mod3 で和をとる（D40）☆》

▶解答◀ （1） $2800 = 28 \cdot 100 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

であり，その約数は

$$2^a 5^b 7^c \ (a = 0 \sim 4,\ b = 0 \sim 2,\ c = 0,\ 1)$$

という形をしている．合同式の法を 3 とすると

$$2^a 5^b c^7 \equiv (-1)^a (-1)^b 1^c = (-1)^{a+b}$$

であるから，3 で割って 1 余るのは $a+b$ が偶数のときで，a, b の偶奇が一致するときであるから，組 (a, b) は $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$ 通りある．$c = 0, 1$ の 2 通りあるから，

$$f(2800) = 8 \cdot 2 = \mathbf{16}$$

3 で割って 2 余る，すなわち $a+b$ が奇数となる組は $5 \cdot 3 - 8 = 7$ 通りあるから，

$$g(2800) = 7 \cdot 2 = \mathbf{14}$$

（**2**） 3 で割り切れない約数について考えるから，n が素因数 3 をもつ場合は，あらかじめ割ることで，n は素因数 3 を持たないとしてよい．このとき，

$$n = {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_r}^{e_r}$$

と素因数分解できたとして，約数の総和

$$S = (1 + p_1 + \cdots + {p_1}^{e_1})(1 + p_2 + \cdots + {p_2}^{e_2})$$
$$\times (1 + p_r + \cdots + {p_r}^{e_r})$$

という式を考える．このとき各項の ${p_k}^{e_k}$ を合同式によって 1 か -1 として考えた和を S' とする．S を展開したときの各項は n の約数と対応するが，S' の各項は 1 と -1 の積から構成されており，その約数が 3 で割って 1 余るなら 1 を，2 余るなら -1 という値をとるから，展開したときに 1 の項が $f(n)$ 個，-1 の項が $g(n)$ 個できたとすると，

$$S' = f(n) - g(n)$$

が成立する．ここからは，S' を展開する前の S' 内の括弧内をそれぞれ考える．各 $p_1 \sim p_r \equiv \pm 1$ のいずれかであることに注意する．

- $p_k \equiv 1$ のとき：括弧内は

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{e_k+1\text{ 個}} = e_k + 1$$

- $p_k \equiv -1$ かつ e_k が偶数のとき：

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 = 1$$

- $p_k \equiv -1$ かつ e_k が奇数のとき：

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1 = 0$$

となる．これより，S' は $e_k + 1, 1, 0$ のいくつかの積からなるため，$S' \geqq 0$ である．これより $f(n) \geqq g(n)$ が示された．

（**3**） $f(n) = g(n) + S' = S' + 15$

であるから，S' のとりうる値を考える．

- $p_k \equiv -1$ かつ e_k が奇数なる素因数 p_k と指数 e_k の組が存在すれば，$S' = 0$ となるから $f(n) = 15$ となる．このとき，n の約数の個数は

$$f(n) + g(n) = 15 + 15 = 30$$

であるから，例えば $n = 2^1 \cdot 3^{14}$ とすると実現する．

- 任意の自然数 k $(1 \leqq k \leqq r)$ について $p_k \equiv -1$ かつ e_k が偶数であれば $S' = 1$ となる．このとき $f(n) = 16$ で，約数の個数は $f(n) + g(n) = 31$ であるから，例えば $n = 2^{30}$ とすると実現する．

- $p_k \equiv 1$ なる p_k が 1 つ存在し，その k に対して $k \neq l$ では $p_l \equiv -1$ かつ e_l が偶数のとき，$S' = e_k + 1$ となり，$f(n) = 15 + e_k + 1$ で，約数の個数は

$$f(n) + g(n) = 30 + (e_k + 1)$$

となる．約数の個数は $(e_1 + 1) \cdots (e_k + 1)$ であり，これは $e_k + 1$ の倍数でもあるから，$e_k + 1$ は 30 の約数であり，

$$e_k + 1 = 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

が候補となる．さらに，その他の $l \neq k$ については $e_l + 1$ は奇数であるからそれらの積である

$$\frac{30 + (e_k + 1)}{e_k + 1} = \frac{30}{e_k + 1} + 1$$

は奇数でなくてはならない．これより，$e_k + 1$ は奇数で

$$e_k + 1 = 3, 5, 15$$

$$e_k = 2, 4, 14$$

例えば順に $n = 7^2 \cdot 2^{10}, 7^4 \cdot 2^6, 7^{14} \cdot 2^2$ とすると $f(n) = 18, 20, 30$ が実現する．

- $p_k \equiv 1$ なる p_k が 2 つ以上存在するとき，

$$S' = (e_k + 1)(e_l + 1)\cdots(e_m + 1) = N + 1$$

という形でかけるが，これは $p_k \equiv 1$ なる p_k が 1 つのとき，$e_k = N$ とした場合の議論に帰着できるから，上と同様である.

よって $f(n)$ のとりうる値は **15, 16, 18, 20, 30** である.