

東京女子医科大学

試験日 2018年1月25日 時間 60分 **数学I** **数学II** **数学III** **数学A** **数学B** (数列, ベクトル)

- 1** 実数を係数とする関数 $f(x) = -x^2 + ax + 1$, $g(x) = ax^3 + 2x^2 + ax - 3$ ($a < 0$) に対して, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $b \neq c$ として $x = b$ で交点を持ち, $x = c$ で接するとする.
- (1) a, b, c を求めよ.
- (2) $y = f(x), y = g(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ.
- 2** 中心が $(2, 3)$ である半径1の円に対して, この円周上の動点を A とし, 点 $(-3, 4)$ を B とする. このとき, O を原点としてベクトル \vec{OA} と \vec{OB} の内積が最大になるときの A の座標を求めよ.
- 3** xy 平面上の原点を O とし, 点 A_0 を x 軸上にとる. このとき, OA_1 を斜辺とし $\angle OA_0A_1$ を直角とする直角三角形 OA_0A_1 を T_1 と表す. OA_2 を斜辺とし $\angle OA_1A_2$ を直角とする直角三角形 OA_1A_2 を T_2 と表す. このようにして OA_n を斜辺とし $\angle OA_{n-1}A_n$ を直角とする直角三角形 $OA_{n-1}A_n$ を T_n と表す. また, OA_0 の長さ a_0 と A_0A_1 の長さをそれぞれ a_0, a_1 と表す.
- (1) T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) がすべて相似のとき, T_1 から T_n までの面積の和 $f(n)$ を a_0, a_1 を用いて表せ.
- (2) $a_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}a_1$ とする. このとき, $f(m) \geq 100f(1)$ を満たす最小の自然数 m を求めよ. 必要なら次の値を用いても良い. $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 5 = 0.6990$.
- 4** x の2次方程式 $nx^2 + 3x - 9 = 0$ が整数解をもつとき正の整数 n をすべて求めよ.

1 **数学II** 【面積】 **標準**

▶解答◀ (1) 2曲線が $x = c$ で接する条件は

$$f(c) = g(c), f'(c) = g'(c)$$

$$-c^2 + ac + 1 = ac^3 + 2c^2 + ac - 3 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$-2c + a = 3ac^2 + 4c + a \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

②より $ac^2 + 2c = 0$ となる. c を掛けて $ac^3 + 2c^2 = 0$ となる. これを①に代入し $c^2 = 4$ を得る.

$c = \pm 2$ である. $c \neq 0$ であるから $ac^2 + 2c = 0$ より $ac + 2 = 0$ となり, $a < 0$ より, $c = 2, a = -1$ である.

$$f(x) = -x^2 - x + 1, g(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 3$$

となる.

$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1)$$

である. 方程式 $f(x) = g(x), x \neq c$ の解が b であり, $b = -1$ である.

(2) 求める面積を S とする. 12分の1公式を用いれば

$$S = \int_{-1}^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \frac{1}{12} \{2 - (-1)\}^4 = \frac{27}{4}$$

となる. 本学の形式は答えの欄に答えの数値を記入するだけである. 有名公式だから, 入試ではパッと書くことをお勧めする. 計算を続けるなら,

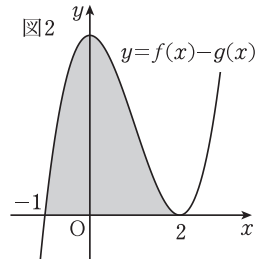
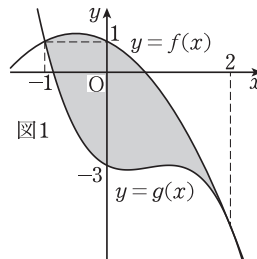
$$S = \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^2 \{(x - 2) + 3\}(x - 2)^2 dx$$

$$= \left[\frac{(x - 2)^4}{4} + (x - 2)^3 \right]_{-1}^2$$

$$= -\frac{(-1 - 2)^4}{4} - (-1 - 2)^3$$

$$= \frac{1}{4}(-3^4 + 4 \cdot 3^3) = \frac{27}{4}$$



注意 【差のグラフを描く】

曲線をそのまま描けば上左図になる. しかし, グニャグニャ曲がったものを試験場で描くのは, あまり実戦的ではない. 正確に描いたら, どう曲がっているのかも怪しい. どうしてもグラフを描きたいなら, 差のグラフ (ここでは引いた物の意味) を描く. 差のグラフと x 軸の間の面積を求めればよい. 曲線 $y = f(x) - g(x)$ は上右図のようになる.

2 **数学B** 【平面ベクトルの内積】 **標準**

▶解答◀ 円の中心を $C(2, 3)$ とおく.

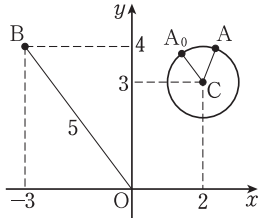
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\vec{OC} + \vec{CA}) \cdot \vec{OB}$$

$$= \vec{OC} \cdot \vec{OB} + \vec{CA} \cdot \vec{OB}$$

2 東京女子医科大学

$\vec{OC} \cdot \vec{OB}$ は成分を使って計算する。また、 \vec{CA} と \vec{OB} のなす角を t とする。

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + |\vec{CA}| |\vec{OB}| \cos t \\ &= 6 + 1 \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \cos t = 6 + 5 \cos t \end{aligned}$$



これが最大となるのは $t = 0$ のときである。それは \vec{CA} と \vec{OB} が同じ向きするとき (図の A_0 のとき) である。このとき

$$\begin{aligned} \vec{CA} &= \frac{1}{5} \vec{OB} = \frac{1}{5}(-3, 4) \\ \vec{OA} &= \vec{OC} + \vec{CA} = (2, 3) + \frac{1}{5}(-3, 4) \end{aligned}$$

求める点 A の座標は $(\frac{7}{5}, \frac{19}{5})$ である。

◆別解◆ $\vec{OA} = (2 + \cos \theta, 3 + \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおけて

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= (2 + \cos \theta) \cdot (-3) + (3 + \sin \theta) \cdot 4 \\ &= -3 \cos \theta + 4 \sin \theta + 6 \\ &= 5 \cos(\theta - \alpha) + 6 \end{aligned}$$

と合成できる。ただし

$$\cos \alpha = \frac{-3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < 2\pi$$

とする。 α は \vec{OB} の偏角である。 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ は $\theta = \alpha$ で最大となる。そのとき A は

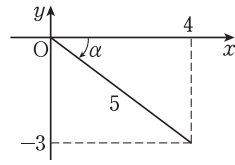
$$\begin{aligned} (2 + \cos \alpha, 3 + \sin \alpha) &= (2 + \frac{-3}{5}, 3 + \frac{4}{5}) \\ &= (\frac{7}{5}, \frac{19}{5}) \end{aligned}$$

最大・最小問題で合成をするなら、コスの合成の方がサインの合成より適している。最初の解法と、コスの合成は、実際には同じものである。表現方法が違うだけで、底を流れる心は同じである。コスの合成を教えるべきである。

サインの合成でやるなら、

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= 4 \sin \theta - 3 \cos \theta + 6 \\ &= 5 \sin(\theta + \alpha) + 6 \end{aligned}$$

と合成できる。ただし α は $\cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = -\frac{3}{5}$ を満たす角とする。



$\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ が最大となるのは、 $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ のときである。このとき $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ は $0 < \theta < 2\pi$ を満たし、

$$\cos \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\vec{OA} = (2 - \frac{3}{5}, 3 + \frac{4}{5})$$

よって、求める点 A の座標は $(\frac{7}{5}, \frac{19}{5})$ である。サインの合成で行うと、このように $\frac{\pi}{2}$ や符号のズレが起こる。効率的な解法でないことが分かる。

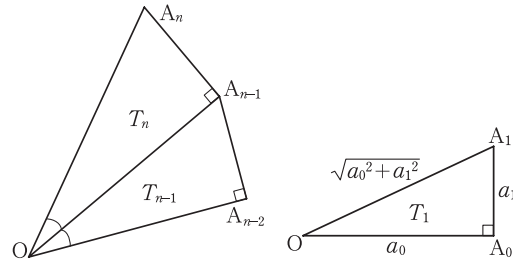
3 数学B【等比数列】標準

▶解答◀ (1) $\triangle OA_{n-2}A_{n-1}$ と

$\triangle OA_{n-1}A_n$ は相似であり、相似比は

$$\frac{OA_1}{OA_0} = \frac{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}{a_0}$$

である。この値を r とおく。



数列 $\{T_n\}$ は、初項 $T_1 = \frac{1}{2}a_0a_1$ 、公比 r^2 の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{T_1(r^{2n} - 1)}{r^2 - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a_0a_1 \left\{ \left(\frac{a_0^2 + a_1^2}{a_0^2} \right)^n - 1 \right\}}{\frac{a_0^2 + a_1^2}{a_0^2} - 1} \\ &= \frac{a_0^3}{2a_1} \left\{ \left(1 + \frac{a_1^2}{a_0^2} \right)^n - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$(2) a_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}a_1 \text{ より } 1 + \frac{a_1^2}{a_0^2} = 1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{9}{5}$$

$$f(m) \geq 100f(1) \text{ より}$$

$$\frac{a_0^3}{2a_1} \left\{ \left(\frac{9}{5} \right)^m - 1 \right\} \geq 100 \cdot \frac{a_0^3}{2a_1} \left\{ \left(\frac{9}{5} \right)^1 - 1 \right\}$$

$$\left(\frac{9}{5} \right)^m - 1 \geq \frac{100 \cdot 4}{5}$$

$$\left(\frac{9}{5} \right)^m \geq 81$$

両辺の常用対数をとって

$$m(2 \log_{10} 3 - \log_{10} 5) \geq 4 \log_{10} 3$$

$$\begin{aligned}
 m &\geq \frac{4\log_{10} 3}{2\log_{10} 3 - \log_{10} 5} \\
 &= \frac{4 \cdot 0.4771}{2 \cdot 0.4771 - 0.6990} \\
 &= \frac{19084}{2552} = 7.4\dots
 \end{aligned}$$

よって、求める自然数は $m = 8$

注意 大学から送られてきた問題文には、「 T_1 と表す。」の後に「原点Oと」という文言が入っていたが、意味不明であり、校正ミスと考えられるから、削除した。

4 **数学A**【不定方程式】 **標準**
考え方

「整数係数の多項式が0になるという形の方程式が整数解をもつ場合には、整数解は定数項の約数である」というのは有名な事実である。

解答 整数解を m とすると

$$\begin{aligned}
 nm^2 + 3m - 9 &= 0 \\
 m(nm + 3) &= 9
 \end{aligned}$$

$m, nm + 3$ は整数だから m は9の約数である。よって、 $m = \pm 1, \pm 3, \pm 9$ のいずれかである。 n について解くと $n = \frac{9-3m}{m^2}$ となる。 $f(m) = \frac{9-3m}{m^2}$ とおく。

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= 12, f(1) = 6 \\
 f(-3) &= \frac{18}{9} = 2, f(3) = 0 \\
 f(-9) &= \frac{36}{81} = \frac{4}{9}, f(9) = \frac{-18}{81} = -\frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

n は正の整数であるから、 $n = 2, 6, 12$

別解 2次方程式を解く人も多いだろう。 $n \geq 1$ であることに注意する。

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36n}}{2n} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$N = \sqrt{9 + 36n}$ とおく。 N は $\sqrt{45}$ 以上の正の整数であ

るから7以上の正の整数である。通常は

$$N^2 = 9 + 36n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

から因数分解して $(N-3)(N+3) = 36n$ にすることも多いが、今は、なんともならない。②より $n = \frac{N^2-9}{36}$

となり、①に代入すると

$$x = \frac{-3 \pm N}{\frac{N^2-9}{18}}$$

複号がプラスのとき、

$$x = \frac{N-3}{\frac{N^2-9}{18}} = \frac{18}{N+3}$$

$N \geq 7$ だから $N+3$ は18の10以上の約数で

$$\begin{aligned}
 N+3 &= 18 \\
 N &= 15 \\
 9+36n &= 225 \\
 n &= 6
 \end{aligned}$$

となる。

複号がマイナスのとき、

$$x = \frac{-3-N}{\frac{N^2-9}{18}} = -\frac{18}{N-3}$$

$N \geq 7$ だから $N-3$ は18の4以上の約数で

$$\begin{aligned}
 N-3 &= 6, 9, 18 \\
 N &= 9, 12, 21 \\
 9+36n &= 81, 144, 441 \\
 n &= 2, \frac{15}{4}, 12
 \end{aligned}$$

となる。 n は正の整数だから $n = 2, 6, 12$

要の分析 全体的に、標準的な問題が並んでいる。確実に解きたい。
 (植田, 三輪, 大貫, 黒滝, 松岡, 藤田, 安田亨)