1. n を正の整数，$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を非負の整数として，整式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}$$
$$+\cdots+a_1x+a_0$$

を考える．ただし，$a_0\neq 1$ とする．p が素数ならば $f(p)$ も素数であるとき，次の (A) または (B) が成り立つことを示せ．

（A）　$a_i=0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ かつ a_0 は素数である．

（B）　$a_i=0\ (i=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ かつ $a_1=1$ である．

（21　東北大・理-AO）

《》

2. n を正の整数，$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を非負の整数として，整式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}$$
$$+\cdots+a_1x+a_0$$

を考える．ただし，$a_0\neq 1$ とする．p が素数ならば $f(p)$ も素数であるとき，次の (A) または (B) が成り立つことを示せ．

（A）　$a_i=0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ かつ a_0 は素数である．

（B）　$a_i=0\ (i=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ かつ $a_1=1$ である．

（21　東北大・理-AO）

▶解答◀　$a_0\neq 1$ より，a_0 は 0，素数，合成数のいずれかである．また，「p が素数ならば $f(p)$ も素数である」という命題を（＊）とする．

（ア）　$a_0=0$ のとき：素数 p に対して

$$f(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p$$
$$=p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1)$$

となるから，$f(p)$ が素数となる条件は p の値によらず

$$a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1=1$$

となることである．よって，条件（＊）が成立するのは $a_i=0\ (i=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ かつ $a_1=1$ のとき，すなわち (B) を満たすときである．

（イ）　$a_0=p$（p は素数）のとき：

$$f(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+p$$
$$=p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1+1)$$

となるから，$f(p)$ が素数となる条件は，

$$a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1+1=1$$

となることである．a_i および p は非負であるから，条件（＊）が成立するのは $a_i=0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ のとき，すなわち (A) を満たすときである．

（ウ）　a_0 が合成数のとき：a_0 のもつ素因数の一つを p とすると，2 以上の N を用いて $a_0=pN$ とかける．このとき

$$f(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+pN$$
$$=p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1+N)$$

となるから，$f(p)$ が素数となる条件は，

$$a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1+N=1$$

となることである．a_i および p は非負であるが，$N\geqq 2$ であるから等号は成り立たない．ゆえに，a_0 が合成数のとき，このような $f(p)$ は存在しない．

以上より，条件（＊）が成立するならば (A) または (B) が成立することが示せた．

注意 **1°【この問題の示していること】**

この問題は壮大なことを示している．それは，「素数を代入したら，新たな素数が得られる」という夢のような多項式は（定数関数と $f(x)=x$ という自明な例以外）存在しない，ということである．このように「素数を生成する式があるかどうか」や，「素数の個数を表す式があるかどうか」は今この瞬間も世界中の数学者によって研究されている．本問では，素数を生成するような多項式は存在しえないことを示したわけである．

2°【どこから思いついたのか】

次のような問題は有名である．

「すべての自然数 n に対し，n^2+n+41 は素数である．」という命題は真か偽か．

これは 2020 年の奈良教育大にも出題されている有名問題である．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ などと代入していくとどれも素数が得られるように思えるが，反例はもちろん存在してそれが $n=41$ のときである．このとき

$$41^2+41+41=41\cdot 43$$

と因数分解できてしまうのである．この例を見ている限り，「なぁんだ，当たり前じゃん」と思うかもしれないが，それを本問に活かせただろうか．定数項が素数であれば，その値を多項式に代入したらくくれるという，具体例であれば当たり前のように思える性質を，

一般化されても使えたかどうかがポイントである．また，次のような問題も過去に出題がある（誘導は削ってある）．

整数を係数とする多項式 $f(x)$ について，任意の自然数 n に対し $f(n)$ が素数ならば，$f(x)$ は定数であることを証明しなさい．　　　（02　慶大・理工）

この問題についても，定数項が 1 でなければ，本問と同じように示すことができる．ただし，定数項が 1 の場合はこれでは示せない．そのため，次のような方法で，定数項が 1 かどうかの場合分けなどせずに示す．方針のみ書く．

Step 1：任意の整数 m, n に対して，$f(m+n)-f(n)$ は m の倍数であることを示す．

Step 2：任意の整数 k, n に対して，$f(n+f(n)k)$ は $f(n)$ の倍数であることを示す．

これらを用いて，任意の自然数 n に対して $f(n)$ が素数ならば，$f(x)$ は定数であることを導く．

この方法だと，定数項の制限はなくなる．しかし，本問には適用ができなくなってしまう．どのやり方も一長一短と言ったところか．解法の幅は広げておきたい．