6 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ を考える．$t>1$ として，$1\leqq x\leqq t,\ 0\leqq y\leqq f(x)$ で表される図形を y 軸のまわりに１回転させてできる立体の体積を $V(t)$ とする．

（１） $f(x)$ の最大値を求めよ．

（２） $e<t<t+h$(e は自然対数の底) のとき，不等式

$$\pi(2t+h)f(t+h)\leqq\frac{V(t+h)-V(t)}{h}\leqq\pi(2t+h)f(t)$$

を示せ．

（３） 体積 $V(t)$ を求めよ．　（22　東北大・後期）

6

数学Ⅲ【体積】**標 準**

▶解答◀ （１）

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\log x\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{x^2(1-3\log x)}{x^6}=\frac{1-3\log x}{x^4}$$

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

$f(x)$ の最大値は $f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3e}}$

（**２**） $t>e$ のとき，$[t,t+h]$ において $f(x)$ は単調減少であるから $f(t+h)\leqq f(x)\leqq f(t)$ である．図２より，$t\leqq x\leqq t+h,\ 0\leqq y\leqq f(t+h)$ で表される長方形を y 軸の周りに１回転させてできる立体 K_1 の体積を V_1，$t\leqq x\leqq t+h,\ 0\leqq y\leqq f(t)$ で表される長方形を y 軸の周りに１回転させてできる立体 K_2 の体積を V_2 とおくと $V_1\leqq V(t+h)-V(t)\leqq V_2$ である．K_1,K_2 はそれぞれ底面が半径 $t+h$ の円である円柱から底面が半径 t の円である円柱をくり抜いた形をしている（高さが異なる）．

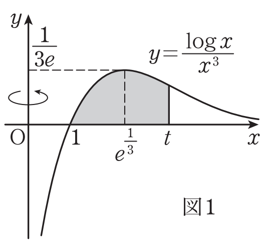

図1

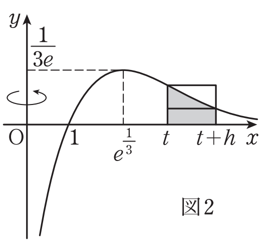

図2

$$V_1=\pi(t+h)^2f(t+h)-\pi t^2f(t+h)$$
$$=\pi(2t+h)hf(t+h)$$
$$V_2=\pi(t+h)^2f(t)-\pi t^2f(t)$$
$$=\pi(2t+h)hf(t)$$

であるから，

$$\pi(2t+h)hf(t+h)\leqq V(t+h)-V(t)$$
$$\leqq\pi(2t+h)hf(t)$$
$$\pi(2t+h)f(t+h)\leqq\frac{V(t+h)-V(t)}{h}$$
$$\leqq\pi(2t+h)f(t)$$

となり，示された．

（**３**） 本問では $e<t<t+h$ が掛かっていない．元の，$t>1,1\leqq x\leqq t$ のままであると考える．

x が t から $t+h$ を動くときの $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．$|h|$ は十分に小さく，$1<t+h$ とする．（２）と同様に，

$h>0$ のとき

$$\pi\{(t+h)^2-t^2\}m$$
$$\leqq V(t+h)-V(t)\leqq\pi\{(t+h)^2-t^2\}M$$

h で割って

$$\pi(2t+h)m\leqq\frac{V(t+h)-V(t)}{h}\leqq\pi(2t+h)M\cdots\cdots①$$

$h<0$ のとき

$$\pi\{t^2-(t+h)^2\}m\leqq V(t)-V(t+h)\leqq\pi\{t^2-(t+h)^2\}M$$

$-h$ で割って ① を得る．$h>0,h<0$ のいずれであっても ① となる．$h\to0$ のとき M,m はいずれも $f(t)$ に収束するから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{h\to0}\frac{V(t+h)-V(t)}{h}=2\pi tf(t)$$

$$V'(t)=2\pi tf(t)=2\pi\frac{\log t}{t^2}=-2\pi\left(\frac{1}{t}\right)'\log t$$

不定積分して

$$V(t)=-2\pi\int\left(\frac{1}{t}\right)'\log t\,dt$$
$$=-2\pi\left(\frac{1}{t}\right)\log t+2\pi\int\left(\frac{1}{t}\right)(\log t)'\,dt$$
$$=-2\pi\left(\frac{1}{t}\right)\log t+2\pi\int\frac{1}{t^2}\,dt$$
$$=-2\pi\frac{\log t}{t}-2\pi\frac{1}{t}+C$$

C は積分定数である．$V(1)=0$ より $C=2\pi$

$$V(t)=\boldsymbol{2\pi\left(-\frac{1}{t}\log t-\frac{1}{t}+1\right)}$$

注 意 図 a は K_1 の図．図 b は $V(t)$ に対応する立体の図．ただし図はかなりデフォルメしてある．

図 a

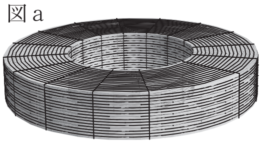

図 b