

**4** 正の実数  $x$  に対して

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - x$$

と定める。以下では、 $e$  は自然対数の底を表すものとする。また、 $2 < e < 3$  が成り立つことを用いてよい。

- (1)  $f(2^m) = 0$  を満たす自然数  $m$  を 2 つ求めよ。
- (2)  $x$  が  $x > e$  を満たすとき、 $f''(x) < 0$  であることを示せ。ただし、 $f''(x)$  は  $f(x)$  の第 2 次導関数を表す。
- (3)  $f(n) > 0$  を満たす自然数  $n$  の個数を求めよ。

(23 学習院大・理)

**4** **数学Ⅲ**【曲線の凹凸・変曲点】 **標準**

▶解答◀ (1)  $f(2^m) = m^2 - 2^m$  より

$f(2^m) = 0$  のとき  $m^2 = 2^m$  で、これを満たす自然数 2 つは  $m = 2, 4$  である。

(2)  $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$  であるから

$$f(x) = \left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2 - x \dots\dots\dots \text{①}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(\log 2)^2} \cdot \frac{\log x}{x} - 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(\log 2)^2} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2}$$

$$= \frac{2}{(\log 2)^2} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$x > e$  のとき  $1 - \log x < 0$  より  $f''(x) < 0$  である。

(3)  $x \geq 3 > e$  では曲線  $y = f(x)$  は上に凸である。

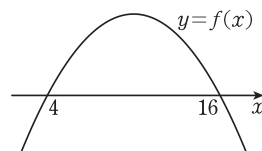
$f(4) = 0, f(16) = 0$  であるから、

$3 \leq x < 4$  では  $f(x) < 0$

$4 < x < 16$  では  $f(x) > 0$

$x > 16$  では  $f(x) < 0$

$f(1) = -1, f(2) = -1$



$f(n) > 0$  となるのは  $n = 5 \sim 15$  の 11 個ある。