6 a, b を実数とする．θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$

が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ．　（23　阪大・前期）

▶解答◀ $1 - 2\sin^2\theta = a\sin\theta + b$

$$2\sin^2\theta + a\sin\theta + b - 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$\sin\theta = t$ とおく．$-1 \leqq t \leqq 1$ である．

$f(t) = 2t^2 + at + b - 1$ とおく．判別式を D とする．$f(t) = 0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ の実数解を少なくとも 1 つもつのは次の（ア），（イ）のいずれかの場合である．

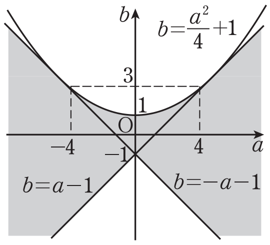
（ア）　$f(-1) = 1 - a + b \geqq 0$，$f(1) = 1 + a + b \geqq 0$，$D = a^2 - 8(b-1) \geqq 0$，軸：$-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$

$$b \geqq a - 1,\ b \geqq -a - 1,\ b \leqq \frac{a^2}{8} + 1,\ -4 \leqq a \leqq 4$$

（イ）　$f(-1)f(1) \leqq 0$

$(1 - a + b)(1 + a + b) \leqq 0$

図示すると境界を含む図の網目部分である．



♦別解♦ ② までは本解と同じである．

$$b = -2t^2 - at + 1$$

右辺を $g(t)$ とおいて，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の最大値・最小値をそれぞれ M, m とすると，② が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で実数解をもつ条件は $m \leqq b \leqq M$ である．

$$g(t) = -2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 1$$

連続関数の閉区間における最大・最小は区間の端または極値でとる．M, m の候補は

$$g(-1) = a - 1,\ g(1) = -a - 1$$

$$g\left(-\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{8} + 1$$

のいずれかである．ただし，$g\left(-\dfrac{a}{4}\right)$ が候補となるのは $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$，すなわち $-4 \leqq a \leqq 4$ のときであり，このとき $g(-1), g(1)$ は M として考える必要はない．これらのグラフをかくと，本解と同じ図が得られる．