（1） 次の関数 $f(x)$

$$f(x)=|\sin x-a|\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

について，以下の問いに答えなさい．ただし，$0\leqq a\leqq 1$ とする．

（i） $a=0$ のとき，$f(x)=\dfrac{1}{2}$ の解を全て求めなさい．

（ii） $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)=C$ がちょうど 4 つの解をもつ C の範囲を求めなさい．

（iii） $f(x)=\dfrac{3}{4}$ がちょうど 3 つの解をもつ a の値を全て求めなさい．　（24　福島大・食農）

11 （1） 数学II【三角関数の方程式】標準

《解の個数 (A15) ☆》

▶解答◀ （i） $a=0$ のとき $|\sin x|=\dfrac{1}{2}$

$\sin x=\pm\dfrac{1}{2}$ となり，$0\leqq x\leqq 2\pi$ より

$x=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}},\ \boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi},\ \boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi},\ \boldsymbol{\dfrac{11}{6}\pi}$

（ii） $\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|=C$ より $C\geqq 0$ であり，

$$\sin x=\frac{1}{2}+C,\ \frac{1}{2}-C \quad\cdots\cdots①$$

$\sin x=t$ の解 x $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ は，$t=0$ のとき 3 個，$t=-1$ のとき 1 個，$t=1$ のとき 1 個，$-1<t<0$ のとき 2 個，$0<t<1$ のとき 2 個，$|t|>1$ のとき 0 個ある．

よって ① の解が 4 個あるのは

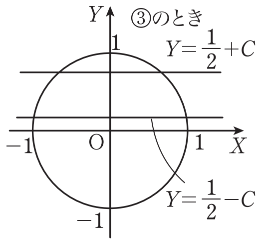
「$\dfrac{1}{2}+C,\ \dfrac{1}{2}-C$ の一方が 0 で他方が 1 または -1 である」 ……②

か，または「$\dfrac{1}{2}+C,\ \dfrac{1}{2}-C$ が異なり，両方とも -1 と 1 の間の 0 以外にある」 ……③

ときである．$\dfrac{1}{2}+C>0$ であるから ② になるのは $C=\dfrac{1}{2}$ のときである．

③ になるのは $-1<\dfrac{1}{2}-C<\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}+C<1$，すなわち $0<C<\dfrac{1}{2}$ のときである．

求める範囲は $\boldsymbol{0<C\leqq\dfrac{1}{2}}$ である．



（iii） $|\sin x-a|=\dfrac{3}{4}$ より

$\sin x=a+\dfrac{3}{4},\ a-\dfrac{3}{4}$

この解 x が 3 個あるのは，

「$a+\dfrac{3}{4},\ a-\dfrac{3}{4}$ の一方が 0 で他方の絶対値が 1 より大きい」 ……④

か，または「$a+\dfrac{3}{4},\ a-\dfrac{3}{4}$ の一方が 1 または -1 で，他方が -1 と 1 の間の 0 以外にある」 ……⑤

ときである．$a+\dfrac{3}{4}\neq 0$ であるから ④ になるのは $a=\dfrac{3}{4}$ のときである．このとき $a+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}>1$ となる．

次に ⑤ について：$0\leqq a\leqq 1$ より $-\dfrac{3}{4}\leqq a-\dfrac{3}{4}\leqq\dfrac{1}{4}$ であるから $a-\dfrac{3}{4}\neq\pm 1$

⑤ になるのは $a+\dfrac{3}{4}=1$ のときで $a=\dfrac{1}{4}$ である．このとき $a-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{2}$ である．求める $a=\boldsymbol{\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}}$