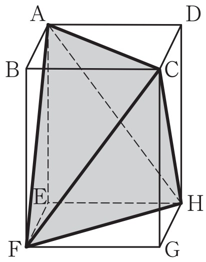
5 図のように，直方体 ABCD-EFGH と，4 点 A，C，F，H を頂点とする四面体 P がある．次の条件 (a)，(b) を満たすとき，以下の問いに答えよ．



(a) AB < AD < AE

(b) 四面体 P の各辺の長さは，いずれも 1 桁の整数である．

（1） 四面体 P の 6 辺の長さの和の最大値を求めよ．また，そのときの四面体 P の体積を求めよ．

（2） 四面体 P の 6 辺の長さの和の最小値を求めよ．また，そのときの四面体 P の体積を求めよ．

（24 岐阜薬大）

5 数学A【立体図形】標準

《等面四面体 (B30)》

考え方 本問のように，各面が合同な四面体を等面四面体という．等面四面体ができるための必要十分条件は，その面が鋭角三角形になることであることが知られている．それは，それを埋め込む直方体ができることでもあり，四面体の 3 辺の長さを指定したときに，直方体の 3 辺の長さが正になることでもある．

▶解答◀ （**1**） $\mathrm{AB}=x$, $\mathrm{AD}=y$, $\mathrm{AE}=z$ とする．$\mathrm{AC}=p$, $\mathrm{AF}=q$, $\mathrm{AH}=r$ とする．

$$x^2+y^2=p^2,\ x^2+z^2=q^2,\ y^2+z^2=r^2$$

となり，辺ごとに加えて 2 で割ると

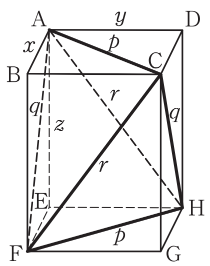
$x^2+y^2+z^2=\dfrac{p^2+q^2+r^2}{2}$ となる．

$$x^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{2}-r^2=\frac{p^2+q^2-r^2}{2}$$

$$y^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{2}-q^2=\frac{p^2+r^2-q^2}{2}$$

$$z^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{2}-p^2=\frac{q^2+r^2-p^2}{2}$$

$x<y<z$ より $p<q<r$



p, q, r が異なる 9 以下の整数であるから $2(p+q+r)$ の最大値は $2(7+8+9)=\mathbf{48}$ である．

$p=7, q=8, r=9$ で，このとき

$$x=4,\ y=\sqrt{33},\ z=4\sqrt{3}$$

となる．P の体積は，直方体から四隅の四面体を除くと考えて

$$xyz-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xyz=\frac{1}{3}xyz=\mathbf{16\sqrt{11}}$$

（**2**） $x^2=\dfrac{p^2+q^2-r^2}{2}>0$ だから $r^2<p^2+q^2$ である．$p<q<r$ であるから $p\leqq r-2,\ q\leqq r-1,\ r\geqq 3$

$r^2<p^2+q^2\leqq(r-2)^2+(r-1)^2$

となり $r^2<(r-2)^2+(r-1)^2$ から $r^2-6r+5>0$ となる．$(r-1)(r-5)>0$ となり $r-1>0$ であるから $r>5$ である．

$r=6$ のとき p^2, q^2 は 1, 4, 9, 16, 25 の異なるものであるが，$36<p^2+q^2$ になるのは $p=4, q=5$ に限る．$p=4, q=5, r=6$ で，$p+q+r=15$ である．

$r=7$ のとき p^2, q^2 は 1, 4, 9, 16, 25, 36 の異なるもので，$49<p^2+q^2$ になるのは $(p, q)=(4, 6), (5, 6)$ に限る．$p+q+r=17, 18$ である．

$r=8, 9$ で同じことを続けてもよいが，そこに最小値を与えるものがないのは明らかである．

$(p+q)^2=p^2+q^2+2pq>p^2+q^2>r^2$ より $p+q>r$ となり，$p+q+r>2r\geqq 16>15$ となる．

$2(p+q+r)$ の最小値は $2(4+5+6)=\mathbf{30}$ である．

このとき $x=\sqrt{\dfrac{5}{2}},\ y=3\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ z=3\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ で，P の体積は $\dfrac{1}{3}xyz=\mathbf{\dfrac{15\sqrt{6}}{4}}$