（2） a, b を実数，c を正の実数とし，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．次の命題の真偽をそれぞれ調べよ．真ならば証明をし，偽ならば反例を一つあげよ．

（i） $a+b+c>0$ であれば，方程式 $f(x)=0$ は実数解を持たない．

（ii） 方程式 $f(x)=0$ が実数解を持たないならば，$a+b+c>0$ である．（24 広島市立大・情報-後期）

（2） 数学I【命題と証明】標準

《真偽の判定（A5）☆》

考え方 $f(x)=0$ が実数解を持たない

$\Longrightarrow b^2-4ac<0$

と思ってはいけない．

$a=0, b=0, c \neq 0$

または $a \neq 0$ かつ $b^2-4ac<0$

である．

▶解答◀ （i） $a+b+c>0$ とは $f(1)>0$ ということである．それと $f(x)=0$ の話は無関係である．命題は**偽**である．反例は $a=0, b=1, c=1$ である．$f(x)=x+1$ であり，$f(x)=0$ は実数解 $x=-1$ をもつ．

（ii） 命題は**真**である．

［証明］$f(x)=0$ が実数解をもたないならば $f(x)$ は符号が一定である．$f(0)=c>0$ であるから

$f(1)=a+b+c>0$ である．

◆別解◆ $f(x)=0$ が実数解をもたないならば，

（ア） $a=0$ のとき．$f(x)=bx+c$ であり，$f(x)=0$ が実数解をもたないから $b=0, c>0$ である．

$a+b+c>0$ となる．

（イ） $a \neq 0$ のとき，判別式を D として

$D=b^2-4ac<0$ である．$c>0$ であるから $a>\dfrac{b^2}{4c}$

したがって

$$\begin{aligned}a+b+c &> \frac{b^2}{4c}+b+c \\ &= \frac{b^2+4bc+4c^2}{4c} \\ &= \frac{(b+2c)^2}{4c} \geqq 0\end{aligned}$$

すなわち $a+b+c>0$ である．