岩手医科大学・医学部

試験日　2024 年 1 月 17 日　時間 120 分（英語と合わせて）　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1　n を整数とし，x の関数 $f(x)=n(\log_2 x)^2+12\log_2 x+n+6$ を考える．次の問い（1）〜（4）に答えよ．

（1）　$n=4$ のとき，$f(x)$ は $x=\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ において，最小値 $\square$ をとる．

（2）　方程式，$f(x)=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，$n=\square$ である．

（3）　k を整数とする．方程式 $f(x)=0$ が 2^k という形の実数解を少なくとも 1 つもつような整数 n は $\square$ 個あり，そのうち最大のものは $n=\square$ である．

（4）　方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつようなすべての整数 n について，$f(x)=0$ の実数解を求めるとき，それら実数解の最大のものは $\square^{\square+\sqrt{\square}}$ である．

2　座標平面上において，点 A を中心とする円 $C: x^2+y^2-6x+2y+6=0$ と点 $\mathrm{B}(-1,2)$ を中心とする円 D が点 T において外接している．このとき，T における円 C と円 D の共通接線を l とし，l 以外の 2 本の共通接線のうち，傾きが大きい方を m とし，他方を n とする．また，m，n の交点を P とし，m と円 C, D の接点をそれぞれ Q，R とする．次の問い（1）〜（4）に答えよ．

（1）　円 D の半径は $\square$ であり，円 C と円 D の接点 T の座標は $\left(\dfrac{\square}{\square}, \dfrac{\square}{\square}\right)$ である．

（2）　直線 l の方程式は $y=\dfrac{\square}{\square}x-\dfrac{\square}{\square}$ である．

（3）　$\mathrm{QR}=\square\sqrt{\square}$ であり，P の座標は $(\square, -\square)$ である．

（4）　直線 AB について，R と対称な点を S とする．直線 RS の方程式は $y=\dfrac{\square}{\square}x+\dfrac{\square}{\square}$ である．

3　袋の中に A，B，C，D，E の文字が 1 個につき 1 つずつ書かれた 5 個の球が入っている．この袋の中から 3 個の球を取り出し，書かれた文字を確認して元に戻すという試行を行う．次の問い（1）〜（4）に答えよ．

（1）　この試行を 1 回行う．取り出された球の中に A の球が含まれる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，A の球と B の球をともに含まれる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2）　この試行を 5 回行う．すべての試行において取り出された球の中に A の球も B の球も含まれない確率は $\left(\dfrac{\square}{\square}\right)^{\square}$ である．

（3）　この試行を 5 回行う．取り出された球の中に A の玉が含まれるという事象が 3 回以上連続して起こる確率は $\dfrac{\square^{\square}}{\square^{\square}}$ である．

（4）　この試行を 5 回行う．すべての球がそれぞれ少なくとも 1 回，取り出された球の中に含まれる確率は $1-\dfrac{\square^{\square}}{\square^{\square}}+\dfrac{1}{\square^{\square}}$ である．

1

数学Ⅱ【対数の雑題】標準

▶解答◀　（1）　$\log_2 x=t$ とおく．$n=4$ のとき

$$f(x)=4t^2+12t+10=4\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+1$$

$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値 **1** をとる．このとき，

$$\log_2 x=-\frac{3}{2} \qquad \therefore \quad x=\boldsymbol{2^{-\frac{3}{2}}}$$

(**2**)　$g(t)=nt^2+12t+n+6$ とおく．$g(t)=0$ がただ 1 つの実数解をもつときを考える．

(ア)　$n=0$ のとき $12t+6=0$ はただ 1 つの実数解をもつ．

(イ)　$n\neq 0$ のとき $g(t)=0$ の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=36-n^2-6n=0$$

のときであるが

$$n^2+6n-36=0 \qquad \therefore \quad n=-3\pm 3\sqrt{5}$$

n は整数であるから不適．

以上より，$n=\boldsymbol{0}$

(**3**)　$x=2^k$ のとき $t=k$ で

$$nk^2+12k+n+6=0$$

(ア)　$n=0$ のとき $12k+6=0$ となり $k=-\dfrac{1}{2}$ となって不適．

(イ)　$n\neq 0$ のとき $k=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-n^2-6n}}{n}$

$N=\sqrt{36-n^2-6n}$ とおく．N は $N\geqq 0$ の整数である．

$$N^2=45-(n+3)^2$$

$$N^2+|n+3|^2=45$$

N^2, $|n+3|^2$ は 45 以下の平方数で，

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$$

の中にある．和が 45 になるから，N^2, $|n+3|^2$ は 9 と 36 であり，

$$(n+3)^2=9,\ 36$$

$$n+3=\pm 3,\ \pm 6$$

$n\neq 0$ より $n=-6,\ 3,\ -9$ で

$n=-6$ のとき $k=\dfrac{-6\pm 6}{-6}=1\mp 1$

$n=3$ のとき $k=\dfrac{-6\pm 3}{3}=-2\pm 1$

$n=-9$ のとき $k=\dfrac{-6\pm 3}{-9}=\dfrac{1}{3},\ 1$

で適する整数 k が存在する．よって，n の個数は **3** 個であり，最大の n は $n=\boldsymbol{3}$ である．

(**4**)　$nt^2+12t+n+6=0$

最大の x を考えるから $x>1,\ t>0$ で考える．最大の t を考える．

$$n(t^2+1)+12t+6=0$$

$t^2+1>0,\ 12t+6>0$ であるから $n\leqq -1$ で考える．

$$t^2+1=-\frac{6}{n}(2t+1)$$

$-\dfrac{6}{n}=p$ とおくと，$p>0$ で，$p=6,\ 3,\ 2,\ \cdots$

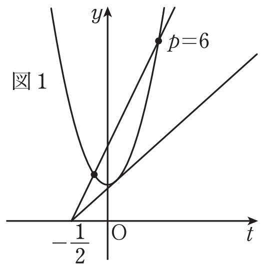
曲線 $y=t^2+1$ と直線 $y=p(2t+1)$ の交点の t 座標が最大になるのは傾き p が最大のとき，$p=6,\ n=-1$ のときに右の交点（t 座標が大きい方）でおこり，

$$-t^2+12t+5=0$$

$t^2-12t-5=0$ で，$t=6+\sqrt{41}$ となる．

$$x=\boldsymbol{2^{6+\sqrt{41}}}$$

図 1



◆別解◆　(**4**)　$n(t^2+1)=-6(2t+1)$

$$n=-6\cdot\frac{2t+1}{t^2+1}$$

$F(t)=-6\cdot\dfrac{2t+1}{t^2+1}$ とおく．

$$F'(t)=-6\cdot\frac{2(t^2+1)-(2t+1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{12(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}$$

$t^2+t-1=0$ の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$F'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(t)$	↗		↘		↗

$$\lim_{t\to\pm\infty}F(t)=0$$

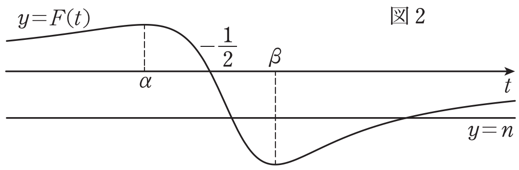


図 2

（図 2 は，少しデフォルメしている．）

曲線 $y=-6\cdot\dfrac{2t+1}{t^2+1}$ と $y=n$ の交点の t 座標で一番大きくなる（交点が一番右に行く）ときを考える．それは $y=n<0$ が t 軸に近づくときである．$n=-1$ で，大きい方の解 t でおこる．（後略）

なお，この解法と上の解法は同系統であり，「文字定数は分離」の系統である．完全な分離をすると分数関数になり，それを途中でやめたのが図 1 の解法である．

2 数学Ⅱ【円が登場する問題】標 準

▶解答◀　（1）

$$円\,C:(x-3)^2+(y+1)^2=4$$

A(3, −1) である．B(−1, 2) で，$\mathrm{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ である．2 円が外接するのは，2 円の半径の和が AB に一致するときである．円 D の半径を r とすると $2+r=5$ のときである．$r=\mathbf{3}$

C, D の半径の比は 2 : 3 であることより，T は線分 AB を 2 : 3 に内分する点である．

$$\mathrm{T}\left(\frac{3\cdot 3+2\cdot(-1)}{2+3},\ \frac{3\cdot(-1)+2\cdot 2}{2+3}\right)=\left(\boldsymbol{\frac{7}{5}},\ \boldsymbol{\frac{1}{5}}\right)$$

（2）　直線 l は点 T を通り，直線 AB に垂直な直線である．直線 AB の傾きは $\dfrac{-1-2}{3-(-1)}=-\dfrac{3}{4}$ であるから

$$l:y=\frac{4}{3}\left(x-\frac{7}{5}\right)+\frac{1}{5}\qquad \therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}}$$

（3）　△PBR ∽ △PAQ であり，相似比 3 : 2 であるから，図のように

$$\mathrm{BP}:\mathrm{AP}=\mathrm{BR}:\mathrm{AQ}=3:2$$

である．よって，P は線分 BA を 3 : 2 に外分する点であるから

$$\mathrm{P}\left(\frac{-2\cdot(-1)+3\cdot 3}{3-2},\ \frac{-2\cdot 2+3\cdot(-1)}{3-2}\right)=\mathbf{(11,\ -7)}$$

点 A から直線 BR に垂線 AH を引く．

$$\mathrm{QR}=\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{25-1}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

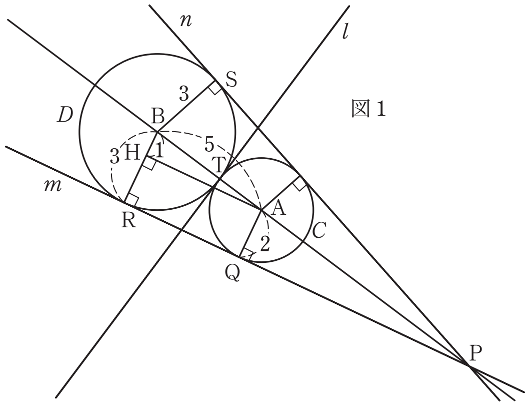


図 1

（4）　$\mathrm{PS}=\sqrt{\mathrm{PB}^2-\mathrm{BS}^2}=\sqrt{12^2+9^2-3^2}=\sqrt{216}$

S，R は 2 円（後者は P を中心，半径 $\sqrt{216}$ の円）

$$D:(x+1)^2+(y-2)^2=9 \quad\cdots\cdots\cdots①$$

$$(x-11)^2+(y+7)^2=216 \quad\cdots\cdots\cdots②$$

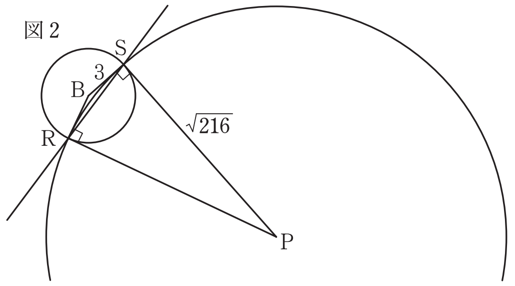
の交点であり，これらを辺ごとにひいて

$$24x-18y-120-45=-207$$

$$24x-18y=-42$$

直線 RS の方程式は $\boldsymbol{4x-3y+7=0}$

図 2



注意　**1°【根軸】**

直線 RS は 2 円 ①，② の根軸という．

2°【極線】

直線 RS は P を極（pole）とする極線（polar）という．日本でヘイ・ポーラという名前で出された曲（Paul and Paula）とは何の関係もないが昔のひびきがよい．

◆別解◆　（4）　円 $D:(x+1)^2+(y-2)^2=9$

R(x_1, y_1), S(x_2, y_2) とおくと，円 D における接線の方程式は

$$(x_1+1)(x+1)+(y_1-2)(y-2)=9$$

$$(x_2+1)(x+1)+(y_2-2)(y-2)=9$$

と表せる．点 P を通るから

$$12(x_1+1)-9(y_1-2)=9$$

$$12(x_2+1)-9(y_2-2)=9$$

点 R，S は直線 $12(x+1)-9(y-2)=9$ 上にあり，これが求める方程式である．

$$12x-9y+21=0\qquad \therefore\quad \boldsymbol{4x-3y+7=0}$$

3 数学A【確率の雑題】標 準

▶解答◀　（1）　一列に並べ，左から 3 個を取り出すと考える．A がどこにあるかは等確率である．1 番目，2 番目，3 番目に出る確率は $\dfrac{1}{5}$ ずつである．A が取り出される確率は $\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$ である．

A，B が左から 3 個のどこかにあるときで，その確率は $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$ である．

（2）　1 回で A も B も取り出さない確率は（4 番目と 5 番目にある確率を考え）$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$ であるから求める確率は $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{10}\right)^5}$

あるいは取り出されない 2 個を選ぶと考え，それが A，B になる確率は $\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}$ と考えてもよい．

（3）　各回の試行において，A の球が出ることを ○，A の球が出ないことを ×，○ でも × でもいいことを △ で表す．○ が 3 回以上連続するとき，どこから 3 連続以

上が始まるかで分類すると，

○○○△△

×○○○△

△×○○○

となる．○ が起こる確率は $\frac{3}{5}$，× が起こる確率は $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ である．よって，求める確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\right\}\cdot 2=\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{3^5}{5^4}}$$

(4)　A を一度も取り出さないという事象を単に A，とし，同様に B, C, D, E を定める．

A, B, C, D, E のうち，同時に起こるとしても 2 つである (3 つは同時には起こらない)．

$$P(A\cup B\cup C\cup D\cup E)$$
$$=P(A)+\cdots+P(E)-{}_5\mathrm{C}_2P(A\cap B)$$
$$=5\left(\frac{2}{5}\right)^5-10\left(\frac{1}{10}\right)^5$$

求める確率は

$$1-P(A\cup B\cup C\cup D\cup E)$$
$$=\boldsymbol{1-\frac{2^5}{5^4}+\frac{1}{10^4}}$$

なお，$A\cap B$ の要素は A と B の両方に含まれているから二重になっている部分の重複を除く．これを他でも A, B, C, D, E から 2 つ取り出す組合せ ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りについて重複がある．

♦別解♦　**(1)**　5 個から 3 個を選ぶ組合せは ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通りある．このうち A を含むものは ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通り，A と B を含むものは 3 通りある．

答えは順に $\frac{6}{10}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$，$\boldsymbol{\frac{3}{10}}$

(4)　余事象を考える．

(ア)　A，B，C，D，E のうちの 3 つだけを取り出すとき (その確率を p_3 とする)．どの 3 つかでその組合せは ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通りある．たとえばそれが A，B，C のとき，1 回で A，B，C を取り出す確率は $\frac{1}{10}$ であるから，5 回とも A，B，C を取り出す確率は $\left(\frac{1}{10}\right)^5$ である．

$$p_3=\left(\frac{1}{10}\right)^5\cdot 10=\frac{1}{10^4}$$

(イ)　A，B，C，D，E のうち 4 つだけを取り出すとき (その確率を p_4 とする)．

どの 4 つかでその組合せは ${}_5\mathrm{C}_4=5$ 通りある．たとえばそれが A，B，C，D のとき，1 回ではこのうちの 3 個を取り出すから，その組合せは ${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通りあり，(1 回目の 3 個の組合せ，2 回目の 3 個の組合せ，…，5 回目の 3 個の組合せ) は 4^5 通りある．このうち，毎回 A，B，C，毎回 A，B，D，毎回 A，C，D，毎回 B，C，D になる 4 通りは不適．

$$p_4=\frac{4^5-4}{10^5}\cdot 5=\frac{2(4^4-1)}{10^4}$$

求める確率は

$$1-(p_3+p_4)=\boldsymbol{1-\frac{2^5}{5^4}+\frac{1}{10^4}}$$

要の分析　**3** は (2) の問題文があいまいで残念である．**1** は対数は関係ない．普通に 2 次方程式で出すべきである．それを除けばほどよい内容である．

(有山，遠藤，安田亨)