4 n を自然数とする．3 辺の長さが $\sqrt{a_n}$, $\sqrt{a_{n+1}}$, $\sqrt{a_{n+1}}$ である二等辺三角形の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ となる数列 $\{a_n\}$ を考える．次の問いに答えよ．

（1） 3 辺の長さが $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$ である二等辺三角形の面積を求めよ．

（2） 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$ を示せ．また，$a_{n+1} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であることを示せ．

（3） 等式 $a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-3}{4a_n}(a_n-1)$ を示せ．

（4） $|a_1-1| \leqq \dfrac{1}{4}$ とする．このとき，すべての n について，

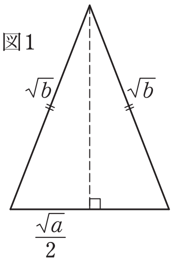
$$|a_{n+1}-1| \leqq \frac{3}{4}|a_n-1|$$

が成り立つことを示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．（24　金沢大・理系）

4 数学Ⅲ【数列の極限】標準
《力学系 (B15) ☆》

▶解答◀ （1） 図 1 より，三角形の面積は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{a}\sqrt{b-\dfrac{a}{4}}}$ である．

図1



（2）（1）より，面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき

$$\frac{1}{2}\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}-\frac{a_n}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_n\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

$$a_{n+1}=\frac{3}{4a_n}+\frac{a_n}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)}$$

$a_n>0$ より，相加・相乗平均の不等式よりすべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} \geqq \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．よって $n \geqq 2$ のとき $a_n \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

（3） $a_{n+1}-1=\dfrac{1}{4}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)-1$

$$=\frac{1}{4a_n}({a_n}^2-4a_n+3)=\frac{a_n-3}{4a_n}(a_n-1)$$

であるから，示された．

（4） まず，$|a_1-1| \leqq \dfrac{1}{4}$ より $-\dfrac{1}{4}<a_1-1<\dfrac{1}{4}$ であるから，$\dfrac{3}{4}<a_1<\dfrac{5}{4}$ である．

次に $-\dfrac{3}{4}<\dfrac{a_n-3}{4a_n}<\dfrac{3}{4}$ を示す．$a_n>0$ であるから，分母をはらった $-3a_n<a_n-3<3a_n$ を示す．これを整理した $\dfrac{3}{4}<a_n$, $-\dfrac{3}{2}<a_n$ を示すが，$n=1$ のときは成り立つ．次に

$a_n \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1.73\cdots}{2}=0.8\cdots>\dfrac{3}{4}$ により $n \geqq 2$ のときも成り立つ．よって示された．

$$|a_{n+1}-1|=\left|\frac{a_n-3}{4a_n}\right||a_n-1| \leqq \frac{3}{4}|a_n-1|$$

$$|a_n-1| \leqq \frac{3}{4}|a_{n-1}-1| \leqq \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}|a_{n-2}-1| \leqq \cdots$$

$$\leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|a_1-1|$$

$$0 \leqq |a_n-1| \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|a_1-1|$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|a_1-1|=0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-1|=0 \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{1}$$