6 座標平面上で，放物線 C が次の方程式で与えられている．

$C : 4x - 4y^2 - 3 = 0$

原点 O から放物線 C に引いた接線で，傾きが正のものを l とする．また，直線 l と放物線 C との共有点を A とする．

（1） 直線 l の方程式，および A の座標を求めよ．

（2） 直線 l と点 A で接する円で，放物線 C との共有点が 2 個であるものを求めよ．

（3） 放物線 C，直線 l および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．　（24　鹿児島大・理系）

6

数学Ⅱ【面積】**標 準**

《円と放物線が 2 交点 (B20) ☆》

▶解答◀ （**1**） $l : y = mx\ (m > 0)$ とする．C と連立させて $4x - 4(mx)^2 - 3 = 0$ となる．

$$4m^2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12m^2}}{4m^2}$ が重解をもつときで，

$4 - 12m^2 = 0$, $m > 0$ より $m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x = \dfrac{2}{4m^2} = \dfrac{3}{2}$

$$l : \boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{3}}x}，\mathrm{A}\left(\boldsymbol{\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \text{である．}$$

（**2**） 円の中心を P とする．P は A における法線

$y = -\sqrt{3}\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 上にあるから，

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2} + t, \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}t\right)$ とおける．このとき

$\mathrm{AP}^2 = t^2 + 3t^2 = 4t^2$ である．円の方程式は

$$\left(x - \frac{3}{2} - t\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}t\right)^2 = 4t^2$$

である．放物線 $x = y^2 + \dfrac{3}{4}$ と連立させて

$$\left(y^2 - \frac{3}{4} - t\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}t\right)^2 = 4t^2$$

$$\left(y^2 - \frac{3}{4}\right)^2 - 2t\left(y^2 - \frac{3}{4}\right)$$
$$+\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}t\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$y \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で考える．$y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で割ると

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2t\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$+\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sqrt{3}t = 0$$

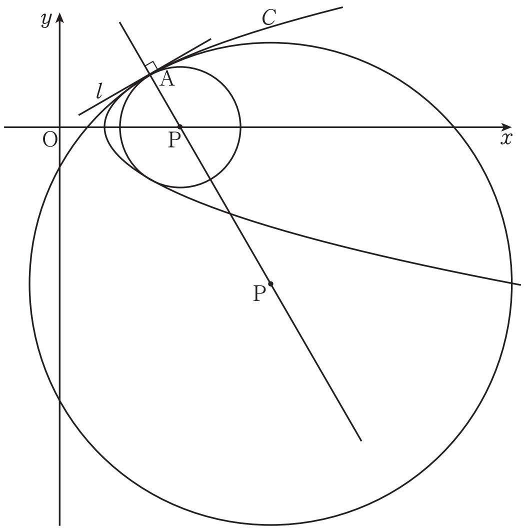
これがもう 1 つ $y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を因子にもつはずであるから，よく見て，t について整理すると

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2t\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$+\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で割ると $\left(y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2t + 1 = 0$

これが重解をもつか，または，重解をもたず $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解にもつときである．前者では $2t = 1$，後者では $\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2t + 1 = 0$ となる．$t = \dfrac{1}{2}, 2$ となる．円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + y^2 = 1}，\boldsymbol{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16}$$



（**3**） $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$ とする．三角形 OAB から，C の弧 AB と線分 AB で囲む面積を引いて（6 分の 1 公式を用いる）

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^3 = \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{16}\right)\sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}}$$