東京女子医科大学

試験日　2024年2月1日　時間60分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 (1)　xy 平面上に直線 $l: x+2y-2=0$ と点 $\mathrm{P}(3, 2)$ がある．点Pを通り，直線 l とのなす角が $45°$ の直線の方程式をすべて求めよ．

(2)　複素数 z の方程式 $z^2+4i=0$ を解け．ただし，i は虚数単位とする．

2 xy 平面上に点 $\mathrm{A}(a, 0)$，点 $\mathrm{B}(0, b)$，点 $\mathrm{O}(0, 0)$ があり，三角形ABOに半径 r の円が内接している．ただし，a と b は自然数で，$a>b$ とし，円の中心をRする．以下の問いに答えよ．

(1)　点Rの座標を a, b を用いて表せ．

(2)　Rの座標が $(4, 4)$ となるような自然数の組 (a, b) を求めよ．

3 3個のサイコロを同時に投げるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　2つが同じ目で1つは異なる目となる確率を求めよ．

(2)　3つの目がすべて異なるとき，3つの目が1, 2, 3や3, 4, 5のように隣り合う数字となる確率を求めよ．

(3)　3個のサイコロを同時に投げる試行を繰り返し行う．ただし，目の出方が以下の条件のいずれも満たさなかったときは，その解で試行を終了する．r を自然数とするとき，r 回以内に試行が終了する確率を r を用いて表せ．

条件(i)　3つの目のうち少なくとも2つは同じ目である．

条件(ii)　3つの目が1, 2, 3や3, 4, 5のように隣り合う数字である．

4 以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について増減を調べ，極値を求めよ．ただし，log は自然対数とする．

(2)　$m^n=n^m$ を満たす自然数 m, n $(m<n)$ を求めよ．

(3)　23^{24} と 24^{23} の大小を比較せよ．

1

(1)　数学Ⅱ【点または直線】標準

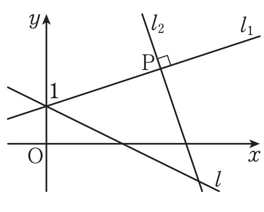
▶解答◀　直線 $l: y=-\dfrac{1}{2}x+1$ と x 軸の正の部分とのなす角を θ とすると $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ である．直線 l とのなす角が $45°$ である直線の傾きは $\tan(\theta\pm45°)$ であるから

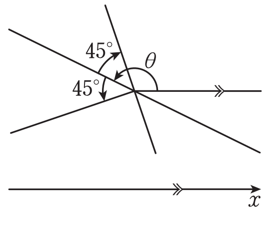
$$\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan45°}{1-\tan\theta\tan45°}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+\frac{1}{2}\cdot1}=\frac{1}{3}$$

$$\tan(\theta-45°)=\frac{\tan\theta-\tan45°}{1+\tan\theta\tan45°}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}\cdot1}=-3$$





したがって，点 $\mathrm{P}(3, 2)$ を通る直線の方程式は

$$y=\frac{1}{3}(x-3)+2,\ y=-3(x-3)+2$$

すなわち，$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+1,\ y=-3x+11}$ である．

図で，$l_1: y=\dfrac{1}{3}x+1$，$l_2: y=-3x+11$ である．

注意　傾き m, m' の2直線の交角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $\left|\dfrac{m'-m}{1+mm'}\right|=\tan\alpha$ となる．求める直線の傾きを m とすると $\dfrac{m+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m}=\pm1$ で，これを解くと $m=\dfrac{1}{3}, -3$ を得る．

(2)　数学Ⅱ【複素数の計算】標準

▶解答◀　$z=x+yi$ (x, y は実数) とおく．

$$z^2+4i=0$$

$$(x+yi)^2+4i=0$$

$$(x^2-y^2)+2(xy+2)i=0$$

$$x^2-y^2=0 \text{ かつ } xy=-2$$

$xy<0$ であるから x, y は異符号で $y=-x$ となり

$$x^2=2$$

$$z=x(1-i)=\boldsymbol{\pm\sqrt{2}(1-i)}$$

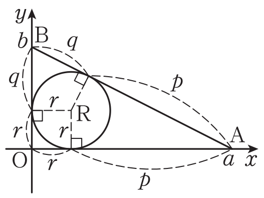
2 数学A【不定方程式】標準

▶解答◀ （1） OA $=a$，OB $=b$，

AB $=\sqrt{a^2+b^2}$ である．図で

$$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}=(p+r)+(q+r)-(p+q)=2r$$

$$r=\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}}{2}=\boldsymbol{\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$



（2） $\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=4$

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b-8$$

図形的に $a>4,\ b>4$ であるから $a+b>8$ である．両辺を 2 乗し

$$a^2+b^2=(a+b)^2-16(a+b)+64$$

$$ab-8a-8b+32=0$$

$$(a-8)(b-8)=32$$

$a>b>4$ より $a-8>b-8>-4$

$$(a-8,\ b-8)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$$

$$(a,\ b)=\boldsymbol{(40,\ 9),\ (24,\ 10),\ (16,\ 12)}$$

注意 内接円の半径の公式というと $S=rs$，$S=\triangle\mathrm{OAB}$ の面積，$s=(\triangle\mathrm{OAB}$ の周の長さの半分$)$ を使う人が多いが

$$r=\frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2})}$$

となり，遠回りになる．

3 数学A【反復試行の確率】標準

▶解答◀ （1） 3 個のサイコロを A，B，C とし，振って出る目を順に $a,\ b,\ c$ とする．$(a,\ b,\ c)$ は全部で 6^3 通りある．このうち $a=b\neq c$ となるものが $6\cdot5$ 通り，$a=c\neq b$ となるものも $6\cdot5$ 通り，$b=c\neq a$ となるものも $6\cdot5$ 通りあり，求める確率は

$$\frac{6\cdot5\cdot3}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

（2） 本問は条件付き確率である．異なる 3 つの目の組合せは ${}_6\mathrm{C}_3=5\cdot4$ 通りある．出る目の組合せを $\{a,\ b,\ c\}$ と書くことにする．連続する 3 つの数字の組合せは $\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$，$\{3,\ 4,\ 5\}$，$\{4,\ 5,\ 6\}$ である．求める確率は $\dfrac{4}{20}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

（3） （i）の事象を A，（ii）の事象を B とおく．$a,\ b,\ c$ が異なるとき，1 つの $\{a,\ b,\ c\}$ から $(a,\ b,\ c)$ は $3!$ 通りできる．$P(B)=\dfrac{4\cdot3!}{6^3}=\dfrac{1}{9}$ である．事象 A と事象 B が同時に起こることはないから，1 回の試行で，A または B が起こる，すなわち操作を終了する確率は

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{9}=\frac{15+4}{36}=\frac{19}{36}$$

であり，終了しない確率は $1-\dfrac{19}{36}=\dfrac{17}{36}$ である．r 回以内に終了する確率は，余事象を考えて

$1-(r$ 回の試行すべてで終了しない確率$)$

$$=\boldsymbol{1-\left(\frac{17}{36}\right)^r}$$

4 数学III【微分の雑題】標準

▶解答◀ （1）

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

極大値 $f(e)=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$ である．

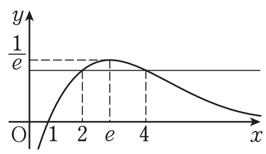
（2） $n^m=m^n$ の両辺の自然対数をとる．

$$\log n^m=\log m^n$$

$$m\log n=n\log m$$

$$\frac{\log n}{n}=\frac{\log m}{m}\qquad\therefore\quad f(n)=f(m)$$

曲線 $y=f(x)$ の概形は図のようになる．



$f(m)=f(n)$ のとき $1<m<e$ であり，$m=2$ である．このとき n はただ 1 つ定まる．$2^4=4^2=16$ であるから $n=4$ となり，$(m,\ n)=\boldsymbol{(2,\ 4)}$ である．

（3） $x>e$ では $f(x)$ は減少関数であるから

$$f(23)>f(24)$$

$$\frac{\log 23}{23}>\frac{\log 24}{24}$$

$$24\log 23>23\log 24$$

$$\log 23^{24}>\log 24^{23}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{23^{24}>24^{23}}$$

要の分析 **4** は問題集等で見かける問題である．今年はどれも解きやすい問題のセットであった．計算ミスをしないようにしたい．

（中路，KK，河野，新美倫，前田拓，安田亨）