1 以下の問いに答えなさい．ただし，log は自然対数とする．

（1） 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ の増減を調べなさい．また，そのグラフの変曲点を求めなさい．

（2） 3 以上の整数 n に対して，積分 $\displaystyle\int_2^n \frac{\log x}{x^2}\,dx$ の値を求めなさい．

（3） 3 以上の整数 n に対して，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{\log k}{k^2}<\frac{1}{2}(1+\log 2)$$

ただし，自然対数の底 e が $2<e<3$ をみたすことを用いてよい．（24 都立大・理系）

1

数学Ⅲ【微積分の雑題】**標 準**

《増減と積分 (B20) ☆》

▶解答◀ （**1**） $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}$

$$=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3-(1-2\log x)\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{6\log x-5}{x^4}$$

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{5}{6}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗		↘		↘

極大値 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$ をとる．

変曲点の座標は $\boldsymbol{\left(e^{\frac{5}{6}},\ \frac{5}{6}e^{-\frac{5}{3}}\right)}$ である．

（**2**） $\displaystyle\int_2^n \frac{\log x}{x^2}\,dx=\int_2^n\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_2^n+\int_2^n\frac{1}{x}(\log x)'\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{n}\log n+\int_2^n\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{n}\log n-\left[\frac{1}{x}\right]_2^n$$

$$=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{n}\log n-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}(1+\log 2)-\frac{1}{n}(1+\log n)}$$

（**3**） $k\geqq 3$ のとき $\sqrt{e}<\sqrt{3}<2\leqq k-1$ であり，$k-1\leqq x\leqq k$ で $f(x)$ は減少する．$f(k)\leqq f(x)$ を $k-1\leqq x\leqq k$ で積分し

$$f(k)\leqq\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx$$

$k=3,\cdots,n$ とした式を辺ごとに加え

$$\sum_{k=3}^{n}f(k)\leqq\int_2^n f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(1+\log 2)-\frac{1}{n}(1+\log n)<\frac{1}{2}(1+\log 2)$$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{\log k}{k^2}<\frac{1}{2}(1+\log 2)$$