

3 次の問いに答えよ.

(1) 2^{2025} は 10 進法で何桁の整数か. また, 最高位の数字は何か.

ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ は用いてよい.

(2) 2^{2025} を $33 = 2^5 + 1$ で割った余りを求めよ.

(25 関西大・総合情報)

[編者註: 原文は $\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$, $\log_{10} 3 = 0.4771\cdots$ になっていたが, $\cdots$ の部分が微妙なため, 疑義が生じないようにするため, $\cdots$ を消した.]

3

【数学Ⅱ】【対数関数の雑題】標準

《桁と最高位 (B15) ☆》

▶解答◀ (1) $\log_{10} 2^{2025} = 2025 \log_{10} 2$

$$= 2025 \cdot 0.301 = 609.525$$

$$2^{2025} = 10^{609.525} = 10^{0.525} \cdot 10^{609}$$

610 桁である.

$$0.4771 < 0.525 < 0.602 = 0.301 \cdot 2$$

$$\log_{10} 3 < 0.525 < \log_{10} 4$$

$3 < 10^{0.525} < 4$ であるから, 最高位の数字は **3** である.

【注意】もし, $\log_{10} 2 = 0.30109$ なら

$2025 \cdot 0.30109 = 609.70725$ で最高位は 5 になる. だ

から, 与えられた情報では, 最高位は確定しない. 出題者のついうっかりであるが, 入試は出題者の想定解を書くゲームであるから, $\log_{10} 2 = 0.3010$ として解けばよい. こうした事故はよくある. むしろ試験場で「どうなっている?」と時間を無駄にするのはよいことではない.

(2) $x = 33$ とおくと, $2^5 = x - 1$

$$2^{2025} = (2^5)^{405} = (x - 1)^{405}$$

$$= x^{405} - 405x^{404} + \cdots + 405x - 1$$

$$= x^{405} - 405x^{404} + \cdots + 404x + 32$$

余りは **32** である.