1. θ を $0<\theta<\pi$ の範囲を動く媒介変数とする．原点を O とする xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，点 $\mathrm{B}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，点 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ をとる．線分 AB を 1 : 2 に内分する点を N とし，N の軌跡を C とする．このとき，以下の設問に答えよ．

（1） OA // DN であることを示せ．

（2） DN の長さを θ を用いて表せ．

（3） C の概形を描け．

（4） 直線 AB は C に接することを示せ．

（25　関西医大・医-後期）

《》

2. θ を $0<\theta<\pi$ の範囲を動く媒介変数とする．原点を O とする xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，点 $\mathrm{B}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，点 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ をとる．線分 AB を 1 : 2 に内分する点を N とし，N の軌跡を C とする．このとき，以下の設問に答えよ．

（1） OA // DN であることを示せ．

（2） DN の長さを θ を用いて表せ．

（3） C の概形を描け．

（4） 直線 AB は C に接することを示せ．

（25　関西医大・医-後期）

▶解答◀ （**1**） $c=\cos\theta,\ s=\sin\theta$ とおく．点 A の座標を A と書く．他も同様とする．$A=(c,\ s)$，$B=(2c^2-1,\ 2sc)$，$D=\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ となる．

$$N=\frac{2A+B}{3}=\frac{1}{3}(2c+2c^2-1,\ 2s+2sc)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=N-D=\frac{1}{3}(2c+2c^2,\ 2s+2sc)$$

$$=\frac{2}{3}(1+c)(c,\ s)$$

よって，OA // DN である．

図 1

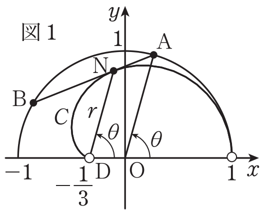
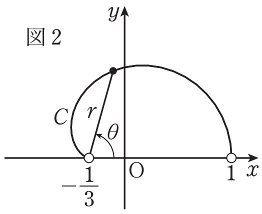


図 2



（**2**） $|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(1+\cos\theta)}$

（**3**） D を極とする極座標で $r=\dfrac{2}{3}(1+\cos\theta)$ となり，r は θ の減少関数であり C の概形は図 2 のようになる（カージオイド）．

（**4**） N を θ で微分して，接線の方向ベクトル

$$\frac{d}{d\theta}N=\frac{1}{3}(-2s-4sc,\ 2c+2c^2-2s^2)$$

$$=\frac{1}{3}(-2s-4sc,\ 2c+2c^2-2(1-c^2))$$

$$=\frac{2}{3}(-s(1+2c),\ 2c^2+c-1)$$

$$=\frac{2}{3}(-s(2c+1),\ (c+1)(2c-1))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2c^2-1-c,\ 2sc-s)$$

$$=((2c+1)(c-1),\ s(2c-1))$$

$p=2c+1,\ q=2c-1$ とおく．

$(-sp,\ (c+1)q)\ /\!/\ (p(c-1),\ sq)$

$\iff (-sp)\cdot sq-(c+1)q\cdot p(c-1)=0$

$\iff pq(1-c^2-s^2)=0$

これは成り立つ．よって，$\dfrac{d}{d\theta}N\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である．直線 AB は C に接する．

注意 $\vec{0}$ でないベクトルについて

$(a,\ b)\ /\!/\ (c,\ d) \iff ad-bc=0$ です．