

創価大学・抜粋

複数試験日より抜粋

- 1** (1) $x^2 - y^2 = 27$ を満たす自然数の組 (x, y) は, $(\square, \square)$ と $(\square, \square)$ である.
- (2) 18, 42, 90 のいずれで割っても 9 余る自然数のうち, もっとも 3000 に近い自然数は, $\boxed{\text{ア}}$ である. また, $\boxed{\text{ア}}$ の正の約数の個数は $\square$ 個であり, その総和は $\square$ である.
- (3) $31!$ が 3 で何回割り切れるか考えよう. 1 から 31 までの整数のうち, 3 で少なくとも 1 回割り切れるものは $\square$ 個, 3 で少なくとも 2 回割り切れるものは $\square$ 個, 3 で少なくとも 3 回割り切れるものは $\square$ 個である. また, 3 で 4 回以上割り切れるものは $\square$ 個である. 以上より, $31!$ は 3 で $\square$ 回割り切れる. 同様に考えると, ${}_{200}C_{100}$ は 5 で $\square$ 回割り切れる.
- 2** 座標平面上に放物線 $C: y = 2x^2 - 8x + 5$ と, 2 点 $A(0, -6)$, $B(3, -3)$ がある. 実数 t を用いて表される C 上の点 $P(t, 2t^2 - 8t + 5)$ を考える.
- (1) C の頂点の座標は $(\square, \square)$ である.
- (2) $\triangle ABP$ の重心の座標を t を用いて表すと $\left(\frac{\square}{\square}t + \square, \frac{\square t^2 - \square t - \square}{\square} \right)$ となる. P が C 上を動くとき, $\triangle ABP$ の重心の軌跡は放物線 $y = \square x^2 - \square x + \frac{\square}{\square}$ となる.
- (3) $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表すと, $S = \square t^2 - \frac{\square}{\square}t + \frac{\square}{\square}$ となる. S の最小値は, P の座標が $\left(\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square} \right)$ のとき, $\frac{\square}{\square}$ である.
- 3** (1) $(x+1)^3(3x-2)^2$ の展開式における x^4 の係数は $\square$ である.
- (2) α, β が方程式 $x^2 - 6x + 7 = 0$ の解であるとき, $\alpha^3 + \beta^3$ の値は $\square$ である.
- (3) 3 辺の長さが 4, 8, 10 である三角形の内接円の半径は $\frac{\sqrt{\square}}{\square}$ である.
- (4) 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \geq (\sqrt{3})^x$ の解は, $x \leq \frac{\square}{\square}$ である.
- (5) 等式 $\int_3^x f(t) dt = \frac{1}{2}x^3 + 3x + a$ を満たす関数 $f(x)$ と実数 a は, $f(x) = \frac{\square}{\square}x^2 + \square$, $a = \frac{\square}{\square}$ である.
- 4** 以下の問いに答えなさい.
- (1) 2 次不等式 $2x^2 + x - 6 \leq 0$ の解は $\square \leq x \leq \frac{\square}{\square}$ である.
- (2) 2 次不等式 $4x + 16 > x^2$ の解は $\square - \square\sqrt{\square} < x < \square + \square\sqrt{\square}$ である.
- (3) 実数 x に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める.
- $p: 2x^2 + x - 6 \leq 0 \quad q: 4x + 16 > x^2 \quad r: |x| < 2$
- このとき, p は q であるための $\boxed{\text{ア}}$.
- このとき, q は p であるための $\boxed{\text{イ}}$.
- このとき, p は r であるための $\boxed{\text{ウ}}$.
- このとき, q は r であるための $\boxed{\text{エ}}$.

上記の **ア** から **エ** に当てはまるものを、下の 0~3 のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

0. 必要条件だが十分条件でない
1. 十分条件だが必要条件でない
2. 必要十分条件である
3. 必要条件でも十分条件でもない

1 (1) 【数学A】【不定方程式】【基本】

▶解答◀ $(x+y)(x-y) = 27$

x, y が自然数のとき、 $x+y > x-y$ であるから、

$$(x+y, x-y) = (27, 1), (9, 3)$$

$$(x, y) = (14, 13), (6, 3)$$

(2) 【数学A】【整数問題の雑題】【標準】

▶解答◀ $18 = 2 \cdot 3^2$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ であるから、18, 42, 90 の最小公倍数は $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$ である。

したがって、18, 42, 90 のいずれで割っても9余る自然数は、 $630n + 9$ (n は整数) と表せる。

$n = 4$ のとき $630 \cdot 4 + 9 = 2529$, $n = 5$ のとき $630 \cdot 5 + 9 = 3159$ であるから、3000 に最も近いのは **3159** である。

$3159 = 3^5 \cdot 13$ であるから、正の約数の個数は $(5+1) \cdot (1+1) = 12$ 個で、その総和は

$$(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)(1+13)$$

$$= 364 \cdot 14 = 5096$$

(3) 【数学A】【整数問題の雑題】【標準】

▶解答◀ 3 で少なくとも1回割り切れるものは、3 の倍数であるから、その個数は $\left[\frac{31}{3} \right] = 10$ である ($[x]$ をガウス記号とする)。

3 で少なくとも2回割り切れるものは、 $3^2 = 9$ の倍数であるから、その個数は $\left[\frac{31}{9} \right] = 3$ である。

3 で少なくとも3回割り切れるものは、 $3^3 = 27$ の倍数であるから、その個数は $\left[\frac{31}{27} \right] = 1$ である。

3 で4回割り切れるものは、 $3^4 = 81$ の倍数であるから、その個数は $\left[\frac{31}{81} \right] = 0$ である。

したがって、 $31!$ は 3 で $10+3+1 = 14$ 回割り切れる。

また、 ${}_{200}C_{100} = \frac{200!}{100! \cdot 100!}$ である。

$200!$ が5で割り切れる回数は

$$\left[\frac{200}{5} \right] + \left[\frac{200}{5^2} \right] + \left[\frac{200}{5^3} \right] = 40 + 8 + 1 = 49$$

$100!$ が5で割り切れる回数は

$$\left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{5^2} \right] = 20 + 4 = 24$$

であるから、 ${}_{200}C_{100} = \frac{200!}{100! \cdot 100!}$ が5で割り切れる回数は

$$49 - 24 \cdot 2 = 1$$

【注意】1° 【ルジャンドル関数】

自然数 n, k に対して1以上 n 以下の自然数で k の倍数が $\left[\frac{n}{k} \right]$ 個ある。 $[x]$ はガウス記号で、 x の整数部分を表す。自然数 n , 素数 p に対して、 $n!$ が持つ素因数 p の個数を $f(n, p)$ で表す。日本では名前がついていないが、「数論の精選 104 問」(朝倉書店、清水俊宏訳)には「ルジャンドル関数」という名前がある。この式の証明は次のようになる。図は $n = 24, p = 2$ の場合であるが、これは視覚化した例でしかない。 p の倍数(図では偶数)を並べ、各整数が p を幾つ持っているかを、縦に、黒丸の個数で表す。最終的には黒丸の総数を求める。1列目を横に数えていく。ここには p の倍数分だけの黒丸が並ぶから $\left[\frac{n}{p} \right]$ 個の黒丸がある。2列目を横に数えていく。ここに黒丸があるものは、 p^2 の倍数のものだから $\left[\frac{n}{p^2} \right]$ 個の黒丸がある。以下同様で

$$f(n, p) = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

となる。

	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24
1列目	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
2列目	● ● ● ● ● ● ● ●
3列目	● ● ● ● ● ●
4列目	● ● ● ● ●

2° 【計算の仕方】

一般の n, p でも同様であるが、たとえば $n = 200, p = 2$ で説明する。

$$f(200, 2) = \left[\frac{200}{2} \right] + \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{8} \right] + \dots$$

を計算するときには、本来に $\left[\frac{200}{8} \right]$ を計算するわけではない。最初の $\left[\frac{200}{2} \right] = [100] = 100$ を計算して、その結果を2で割って50になる。次は50を2で割って25、次は25を2で割って(12.5になる)小数部分を切り捨てて12とする。次は6、次は3、次は、

3を2で割って(1.5になる)小数部分を切り捨てて1となる.

理由は, 正の整数 m, n に対して

$$\left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{m}{2^n} \right\rfloor \right\rfloor \dots\dots\dots ①$$

になるからである. m を2進表示して

$$m = a_0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_n \cdot 2^n + a_{n+1} \cdot 2^{n+1} + \dots$$

とする. a_i は0または1である.

①の左辺について:

$$\frac{m}{2^{n+1}} = \frac{a_0}{2^{n+1}} + \dots + \frac{a_n}{2} \dots\dots\dots ②$$

$$+ a_{n+1} + a_{n+2} \cdot 2 + \dots$$

②部分は2進法による小数表示だから0と1の間にある.

$$\left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor = a_{n+1} + a_{n+2} \cdot 2 + \dots \dots\dots ③$$

である. 同様に右辺は

$$\left\lfloor \frac{m}{2^n} \right\rfloor = a_n + a_{n+1} \cdot 2 + a_{n+2} \cdot 2^2 + \dots$$

$$\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{m}{2^n} \right\rfloor = \frac{a_n}{2} + a_{n+1} + a_{n+2} \cdot 2 + \dots$$

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{m}{2^n} \right\rfloor \right\rfloor = a_{n+1} + a_{n+2} \cdot 2 + \dots \dots\dots ④$$

となる. ③, ④が等しいから, ①が成り立つ.

2 数学Ⅱ【軌跡】標準

▶解答◀ (1) $C: y = 2(x-2)^2 - 3$

であるから, C の頂点の座標は(2, -3)である.

(2) $\triangle ABP$ の重心の座標は

$$\left(\frac{t+0+3}{3}, \frac{2t^2-8t+5-6-3}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}t + 1, \frac{2t^2-8t-4}{3} \right)$$

$x = \frac{t}{3} + 1, y = \frac{2t^2-8t-4}{3}$ とおく. t の変域は実数全体であるから, x の変域は実数全体である.

$t = 3(x-1)$ であるから,

$$y = \frac{1}{3} \{18(x-1)^2 - 24(x-1) - 4\}$$

$$y = 6(x^2 - 2x + 1) - 8x + 8 - \frac{4}{3}$$

$$y = 6x^2 - 20x + \frac{38}{3}$$

(3) $\overrightarrow{AB} = (3, 3), \overrightarrow{AP} = (t, 2t^2 - 8t + 11)$ であるから,

$$S = \frac{1}{2} |3(2t^2 - 8t + 11) - 3t|$$

$$= \left| 3t^2 - \frac{27}{2}t + \frac{33}{2} \right|$$

$$3t^2 - \frac{27}{2}t + \frac{33}{2} = 3\left(t - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{21}{16} > 0 \text{ であるから}$$

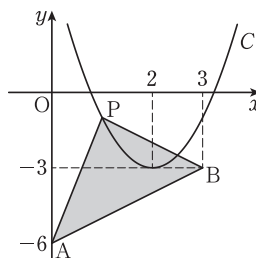
$$S = 3t^2 - \frac{27}{2}t + \frac{33}{2}$$

であり, $t = \frac{9}{4}$ のとき最小値 $\frac{21}{16}$ をとる.

このとき, P の座標は $x = \frac{9}{4}$,

$$y = 2 \cdot \frac{81}{16} - 18 + 5 = -\frac{23}{8}$$

より $\left(\frac{9}{4}, -\frac{23}{8}\right)$ である.



3 (1) 数学Ⅰ【多項式の計算(除法を除く)】基本

▶解答◀ $(x+1)^3(3x-2)^2$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(9x^2 - 12x + 4)$$

$$= \overbrace{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}^{x^4 \text{の係数は } -12 + 27 = 15} (9x^2 - 12x + 4)$$

x^4 の係数は $-12 + 27 = 15$

(2) 数学Ⅰ【2次方程式】基本

▶解答◀ 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 7$$

であるから,

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 216 - 3 \cdot 7 \cdot 6 = 216 - 126 = 90$$

(3) 数学A【円が登場する問題】標準

▶解答◀ $AB = 10, AC = 4, BC = 8$ とする.

余弦定理より

$$\cos A = \frac{10^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 4} = \frac{13}{20}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{20}\right)^2} = \frac{\sqrt{231}}{20}$$

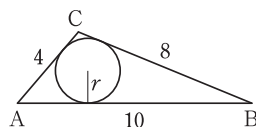
したがって, $\triangle ABC$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{231}}{20} = \sqrt{231}$$

内接円の半径を r とすると,

$$S = \frac{1}{2} r(10 + 4 + 8)$$

であるから, $r = \frac{\sqrt{231}}{11}$ である.



(4) **【数学Ⅱ】【指数不等式】【基本】****▶解答◀** $3^{-(x+1)} \geq 3^{\frac{x}{2}}$

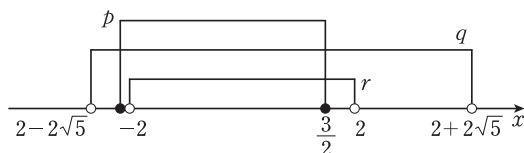
$$-x-1 \geq \frac{x}{2}$$

であるから、 $x \leq -\frac{2}{3}$ (5) **【数学Ⅱ】【微積分の融合】【基本】****▶解答◀** $\int_3^x f(t) dt = \frac{1}{2}x^3 + 3x + a \dots\dots\dots \textcircled{1}$ の両辺を x で微分して、

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3$$

また、 $\textcircled{1}$ に $x=3$ を代入して

$$0 = \frac{27}{2} + 9 + a$$

であるから、 $a = -\frac{45}{2}$ **4** **【数学Ⅰ】【必要・十分条件】【標準】****▶解答◀** (1) $(2x-3)(x+2) \leq 0$ であるから、 $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (2) $x^2 - 4x - 16 < 0$ $x^2 - 4x - 16 = 0$ の解は $x = 2 \pm \sqrt{20}$ で、不等式の解は $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$ (3) $|x| < 2$ をみたすのは、 $-2 < x < 2$ である。 p, q, r をみたす x の範囲を数直線上に図示すると、以下のようになる。 $2 - 2\sqrt{5} = 2 - 2 \cdot 2.23\dots = -2.4\dots < -2$ であることに注意せよ。 p, q, r をみたす x の集合を P, Q, R で表すと、 $P \subset Q, R \subset Q$ であり、

$$p \Rightarrow q, r \Rightarrow q$$

である。 P, R には一方が他方に含まれる関係はないから、 p, r は無関係である。 $p \xrightarrow[\times]{\circ} q$ (「ため」のかかる目標)、目標に向かう矢印が正しいから、 p は q であるための十分条件だが必要条件でない(1)。 $q \xrightarrow[\circ]{\times} p$ (「ため」のかかる目標)、目標から出る矢印が正しいから、 q は p であるための必要条件だが十分条件でない(0)。 $p \xrightarrow[\times]{\times} r$ であるから、 p は r であるための必要条件でも十分条件でもない(3)。 $q \xrightarrow[\circ]{\times} r$ (「ため」のかかる目標)、目標から出る矢印が正しいから、 q は r であるための必要条件だが十分条件でない(0)。**要の分析** これらの問題については、特にきちんと考え方を身につけておきたい。

(川越, 小田, 渡丸, 安田亨)