2　正の実数 p に対して，$f(x)=x^3-x+p$ とする．

（1）　x についての方程式 $f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつとき，p のとりうる値の範囲を求めよ．

（2）　a,b,c は実数で $c>0$ とする．また，i を虚数単位とする．$a,\ b+ci,\ b-ci$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき，a,c,p をそれぞれ b を用いて表し，b のとりうる値の範囲を求めよ．

（3）（2）の b,c について，少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ．　（25　筑波大・共通）

2 数学II【微分と方程式】標準

《3 次関数の基本 (B20) ☆》

▶解答◀　（1）　$x^3-x+p=0$

$$p=-x^3+x$$

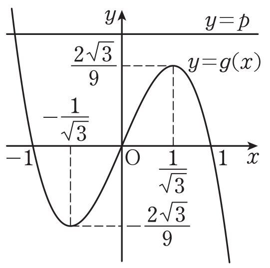
$g(x)=-x^3+x$ とおく．$g'(x)=-3x^2+1$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘		↗		↘

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつとき，曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=p$ の共有点が1つであるから，$p>0$ も合わせると $\boldsymbol{p>\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$ である．



（2）　解と係数の関係より

$$a+(b+ci)+(b-ci)=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$a(b+ci)+(b+ci)(b-ci)+(b-ci)a=-1 \quad \cdots\cdots②$$

$$a(b+ci)(b-ci)=-p \quad \cdots\cdots③$$

① より

$$a+2b=0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a=-2b} \quad \cdots\cdots④$$

② より $2ab+b^2+c^2=-1$

④ を代入して $-3b^2+c^2=-1$

$$c^2=3b^2-1 \quad \cdots\cdots⑤$$

また，③ より $a(b^2+c^2)=-p$

④，⑤ より $\boldsymbol{p=2b(4b^2-1)}$

である．⑤ で $c>0$ より $\boldsymbol{c=\sqrt{3b^2-1}}$ かつ $3b^2-1>0$ である．このとき $b^2>\dfrac{1}{3}$ となり，$4b^2-1>\dfrac{1}{3}>0$ であるから，$p=2b(4b^2-1)>0$ より $b>0$ となる．

$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}<b}$

（3）　b,c がともに整数として矛盾を導く．

3 を法とする．このとき ⑤ より

$$c^2=3b^2-1\equiv-1\equiv 2$$

である．一方 $c\equiv 0$ であれば $c^2\equiv 0$，$c\equiv\pm 1$ であれば $c^2\equiv 1$ であるから矛盾する．

したがって b,c の少なくとも一方は整数でない．