

1. 関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = -3\cos 2\theta + 3\sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$+6(\sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta) - 5 \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

によって定める. $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めたい.

$$\sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta = \square \sin \left(\theta - \frac{\square}{\square} \pi \right)$$

となる. ただし, $0 \leq \frac{\square}{\square} \pi < 2\pi$ とする. $t = \sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta$ とおくと, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, t の最小値は $-\square$ で, t の最大値は $\square$ である. また

$$f(\theta) = -\square t^2 + \square t + \square$$

となる. よって, 関数 $f(\theta)$ は, $\theta = \frac{\square}{\square} \pi$ のとき最大値 $\square$ をとり, $\theta = -\frac{\square}{\square} \pi$ のとき最小値 $-\square$ をとる.

(25 東京理科大・理工)

2. 関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = -3\cos 2\theta + 3\sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$+6(\sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta) - 5 \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

によって定める. $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めたい.

$$\sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta = \square \sin \left(\theta - \frac{\square}{\square} \pi \right)$$

となる. ただし, $0 \leq \frac{\square}{\square} \pi < 2\pi$ とする.

$t = \sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta$ とおくと, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, t の最小値は $-\square$ で, t の最大値は $\square$ である. また

$$f(\theta) = -\square t^2 + \square t + \square$$

となる. よって, 関数 $f(\theta)$ は, $\theta = \frac{\square}{\square} \pi$ のとき

最大値 $\square$ をとり, $\theta = -\frac{\square}{\square} \pi$ のとき最小値 $-\square$ をとる.

(25 東京理科大・理工)

▶解答◀ $t = \sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta = 2\sin \left(\theta - \frac{1}{3}\pi \right)$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $-1 \leq \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \leq \frac{1}{2}$ で

あるから t の最小値は -2 , 最大値は 1 である.

$t = \sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta$ のとき,

$$t^2 = \sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta - 2\sqrt{3}\sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2\cos^2 \theta - \sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$= 2 + \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta = t^2 - 2 \text{ となって}$$

$$f(\theta) = -3(t^2 - 2) + 6t - 5$$

$$= -3t^2 + 6t + 1$$

$$= -3(t-1)^2 + 4$$

$t = 1$, つまり, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 4 をとり, $t = -2$,
 つまり, $\theta = -\frac{\pi}{6}$ のとき最小値 $-12 - 12 + 1 = -23$ をとる.

