

の符号は $x = 0, -\frac{3}{2}$ (境界という) の前後で変わる.
 $x > 0$ のときは $x > 0, 2x + 3 > 0, \frac{2x+3}{x} > 0$ となり, 不適. $-\frac{3}{2} < x < 0$ では分母の符号だけ変わるから, 適す. $x < -\frac{3}{2}$ では $2x + 3$ の符号も変わるから不適となる.

通常, 各因子は 1 次 ($(2x+3)^2$ などになっていないということ) だから, 境界を飛び越える度に適と不適を交代する.

【集合の雑題】

《要素から調べる (A5)》

87. a を実数とし, 2 つの集合

$$A = \{-2, 3a-5, a^2-3a-11, a^2-7a+7\}$$

$$B = \{1, 2, a^2-8a+19\}$$

において, $A \cap B = \{1, 7\}$ とする. このとき $a = \square$ であり, $A \cup B$ の要素のうち最大のものは $\square$ である. (25 玉川大)

▶解答◀ $A \cap B = \{1, 7\}$ であるから, $7 \in B$ である. よって $a^2 - 8a + 19 = 7$ となるから

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$(a-2)(a-6) = 0 \quad \therefore a = 2, 6$$

$a = 2$ のとき $A = \{-2, 1, -13, -3\}$ となり, $a = 6$ のとき $A = \{-2, 13, 7, 1\}$ となるが, $A \cap B = \{1, 7\}$ となるのは $a = 6$ のときである. このとき

$$A \cup B = \{-2, 1, 2, 7, 13\}$$

であるから $A \cup B$ の要素で最大のものは 13 である.

《不等式の解 (A5)》

88. すべての実数を要素とする全体集合 U と, 次のような U の部分集合 A, B がある.

$A = \{k \mid x \text{ の 2 次方程式 } x^2 + 2kx + 4 = 0 \text{ が実数解をもつ}\}$

$B = \{k \mid x \text{ の 2 次方程式 } x^2 + 2(k+1)x + 4 = 0 \text{ が実数解をもつ}\}$

(1) $A \cap B = \{k \mid k \leq -\square, \square \leq k\}$ である.

(2) $\overline{A \cup B} = \{k \mid -\square < k < \square\}$ である.

(3) $\overline{A \cap B} = \{k \mid \square \leq k < \square\}$ である.

(4) $A \cup \overline{B} = \{k \mid k < \square, \square \leq k\}$ である.

(25 国際医療福祉大・看護ほか)

▶解答◀ $x^2 + 2kx + 4 = 0$ の判別式を D_A とすると, $\frac{D_A}{4} = k^2 - 4$ で, A の条件を満たすのは $\frac{D_A}{4} \geq 0$

であるから

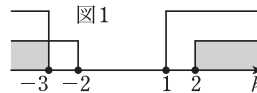
$$A = \{k \mid k \leq -2, k \geq 2\}$$

$x^2 + 2(k+1)x + 4 = 0$ の判別式を D_B とすると,

$$\frac{D_B}{4} = (k+1)^2 - 4 \text{ で, } B \text{ の条件を満たすのは } \frac{D_B}{4} \geq 0$$

であるから $B = \{k \mid k \leq -3, k \geq 1\}$

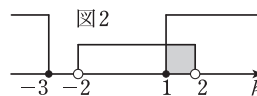
(1) $A \cap B = \{k \mid k \leq -3, 2 \leq k\}$



(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \{k \mid -3 < k < 2\}$

(3) $\overline{A} = \{k \mid -2 < k < 2\}$ より

$$\overline{A \cap B} = \{k \mid 1 \leq k < 2\}$$



(4) $A \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \{k \mid k < 1, 2 \leq k\}$

【必要・十分条件】

《対偶が有効 (B15) ☆》

89. a を正の実数とする. 実数 x に関する条件 p および q を

$$p: |2x-1| \leq 2$$

$$q: x^2 - \frac{5}{4}x \leq a$$

と定める.

(1) p が q であるための必要条件であるような a の範囲を求めよ.

(2) p が q であるための十分条件であるような a の範囲を求めよ. (25 学習院大・法)

▶解答◀ (1) p は $-2 \leq 2x-1 \leq 2$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

となる. $q \implies p$ であるようにする. q には未知の a がある. 議論の方向を変えるために対偶をとると $\overline{p} \implies \overline{q}$ である.

$$x < -\frac{1}{2} \text{ または } x > \frac{3}{2} \implies x^2 - \frac{5}{4}x > a$$

実数 x を含む条件 $r(x), s(x)$ について,

$$r(x) \implies s(x)$$

とは, x が $r(x)$ を満たすならば $s(x)$ も満たす.

つまり, $x < -\frac{1}{2}, x > \frac{3}{2}$ のどちらの x をとってきても

もすべて $x^2 - \frac{5}{4}x > a$ を満たすということである.

$f(x) = x^2 - \frac{5}{4}x$ とおく.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$$