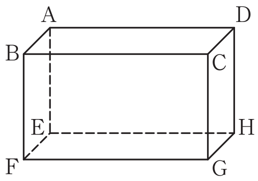
118. 図のような直方体 ABCD − EFGH を考える．以下の問いに答えよ．



（1） 線分 CE と三角形 AFH との交点を J とする．J が三角形 AFH の重心となることを示せ．

（2） 線分 CE と三角形 BDG との交点を K とする．三角形 AEJ，三角形 AJK，三角形 ACK の面積がすべて等しくなることを示せ．

（18 名古屋市立大・経，医）

考え方 話の流れ的には，直線 EC と平面 AFH の交点を求めるというのが自然である．$\overrightarrow{\mathrm{EF}}, \overrightarrow{\mathrm{EH}}, \overrightarrow{\mathrm{EA}}$ を基底として $\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$ を表す．

▶解答◀ （1） $\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}$

である．J は直線 EC 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{EJ}}=s\overrightarrow{\mathrm{EC}}=s(\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

と書ける．また，J は平面 AFH 上にあるから，

$x+y+z=1$ として

$$\overrightarrow{\mathrm{EJ}}=x\overrightarrow{\mathrm{EF}}+y\overrightarrow{\mathrm{EH}}+z\overrightarrow{\mathrm{EA}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

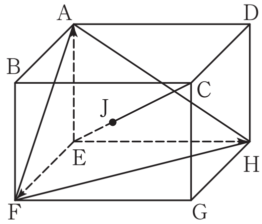
と書ける．$\overrightarrow{\mathrm{EF}}, \overrightarrow{\mathrm{EH}}, \overrightarrow{\mathrm{EA}}$ は 1 次独立であるから ①，② の係数を比べ

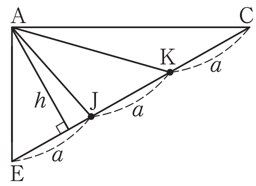
$$x=y=z=s$$

である．$x+y+z=1$ に代入して $s=\dfrac{1}{3}$ を得る．

$$\overrightarrow{\mathrm{EJ}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}})$$

であり，J は三角形 AFH の重心である．また，J は EC を 1 : 2 に内分する．





（**2**） 同様に，対称性より（あるいは，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ で考えれば $\overrightarrow{\mathrm{CK}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}})$ となり）EC と平面 BDG の交点 K は三角形 BDG の重心であり，K は CE を 1 : 2 に内分する．ゆえに J，K は EC を 3 等分する．EJ = JK = KC = a とし，A から CE に下ろした垂線の長さを h とすると

$$\triangle\mathrm{AEJ}=\triangle\mathrm{AJK}=\triangle\mathrm{ACK}=\frac{1}{2}ah$$

であり，△AEJ，△AJK，△ACK の面積はすべて等しい．

177. 実数 x に対して，$[x]$ は x 以下の最大の整数とする．数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\left[\sqrt{n+1}\right]$$

$$b_1=1,\ b_{n+1}=b_n+(-1)^n\left[\sqrt{n+1}\right]$$

$(n=1,2,3,\cdots)$ で定義すると

（1） $a_{10}=\boxed{}$，$b_{10}=\boxed{}$ である．

（2） $a_n \geqq 100$ となるのは $n \geqq \boxed{}$ のときである．

（3） $b_n=5$ となる最初の項は $n=\boxed{}$ のときである．

（4） 一般に，$m=\left[\sqrt{n}\right]$ とすると

$$a_n=\frac{\boxed{}mn+\boxed{}m^{\boxed{}}+\boxed{}m^2+\boxed{}m}{\boxed{}}$$

となる．（18　慶應大・環境情報）

▶解答◀ （1） 与式は見づらいから $a_n=\cdots$，$b_n=\cdots$ の形に書き換える．

$$a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+\left[\sqrt{n}\right]\ (n \geqq 2)$$

$$b_1=1,\ b_n=b_{n-1}+(-1)^{n-1}\left[\sqrt{n}\right]\ (n \geqq 2)$$

$$a_2=a_1+[\sqrt{2}]=1+1$$

$$a_3=a_2+[\sqrt{3}]=1+1+1$$

$$a_4=a_3+[\sqrt{4}]=1+1+1+2$$

このように，平方数を境に階差が変わる．階差 $\left[\sqrt{n}\right]$ が同じになる a_n で群を作る．ただし，第何群という言い方はしないでおく．

$a_4 \sim a_8$ は（5 個ある）階差は 2

$a_9 \sim a_{15}$ は（7 個ある）階差は 3

…

$a_{k^2} \sim a_{(k+1)^2-1}$ は（$2k+1$ 個ある）階差は k

…

$a_{(m-1)^2} \sim a_{m^2-1}$ は（$2m-1$ 個ある）階差は $m-1$

$m^2 \leqq n<(m+1)^2$ のとき階差は m である．

a_{10} は階差が 3 の群（その第 1 項は a_9，第 2 項は a_{10} である）．

$$a_{10}=1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 2=\mathbf{19}$$

となる．

$$b_2=b_1-[\sqrt{2}]=1-1$$

$$b_3=b_2+[\sqrt{3}]=1-1+1$$

$$b_4=b_3-[\sqrt{4}]=1-1+1-2$$

添え字が偶数のときに新たに加算される値は負，添え字が奇数のときに新たに加算される値は正である．

$b_4 \sim b_8$ は（5 個ある）階差は $-2, 2, -2, 2, -2$ となり，ここでの階差の総和は -2

$a_9 \sim a_{15}$ は（7 個ある）階差は $3, -3, 3, -3, 3, -3, 3$ となり，ここでの階差の総和は 3

$$b_{10}=1+(-1+1)+(-2+2-2+2-2)$$
$$+(3-3)=\mathbf{-1}$$

（2） $a_n=1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9+\cdots$

となっていく．

$$a_{24}=1+1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9=70$$

あと 30 増えるのは 6 項後で，

$$a_{30}=a_{24}+5\cdot 6=100$$

である．$a_n \geqq 100$ になるのは $n \geqq \mathbf{30}$ のときである．

（3） $b_1=1, b_2=0, b_3=1$ で，以後，

$b_4 \sim b_8$ は階差が $-2, 2, -2, 2, -2$ で b_n は $-1, 1, \cdots, -1$

$b_9 \sim b_{15}$ は階差が $3, -3, \cdots, 3$ で b_n は $2, -1, \cdots, 2$

$b_{16} \sim b_{24}$ は階差が $-4, 4, \cdots, -4$ で b_n は $-2, 2, \cdots, -2$

$b_{25} \sim b_{35}$ は階差が $5, -5, \cdots, 5$ で b_n は $3, -2, \cdots, 3$

$b_{36} \sim b_{48}$ は階差が $-6, 6, \cdots, -6$ で b_n は $-3, 3, \cdots, -3$

$b_{49} \sim b_{63}$ は階差が $7, -7, \cdots, 7$ で b_n は $4, -3, \cdots, 4$

$b_{64} \sim b_{80}$ は階差が $-8, 8, \cdots, -8$ で b_n は $-4, 4, \cdots, -4$

とくり返す．そして

$$b_{81}=-4+9=5$$

$b_n=5$ となる最初の項は $n=\mathbf{81}$ のときである．

（4） $n \geqq 4$ のとき．$m \geqq 2$ であり，

$$a_n=\sum_{k=1}^{m-1}k(2k+1)+(n-m^2+1)m$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}(2k^2+k)+(n-m^2+1)m$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}m(m-1)(2m-1)+\frac{1}{2}m(m-1)$$
$$+mn-m^3+m$$

$$=\frac{1}{6}m(m-1)\{2(2m-1)+3\}+mn-m^3+m$$

$$=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)+mn-m^3+m$$

$$=\frac{1}{6}(4m^3-3m^2-m)+mn-m^3+m$$

$$=\boldsymbol{\frac{6mn-2m^3-3m^2+5m}{6}}$$

$n=1, 2, 3$ のとき，$m=1$ でこの式は成り立つ．